

【1】

(1)

$y \geq |2x+1|$ について、 $2x+1=0$ の解は $x=-\frac{1}{2}$ であるから、絶対値を外すと、

$$y \geq 2x+1 (x \geq -\frac{1}{2}), \quad y \geq -2x-1 (x \leq -\frac{1}{2})$$

となる。また、 $2x-3y+9 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{2}{3}x+3$ である。直線 $y=2x+1$ と直線 $y=\frac{2}{3}x+3$ の交点の座標は、

$$2x+1=\frac{2}{3}x+3$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}x=2$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

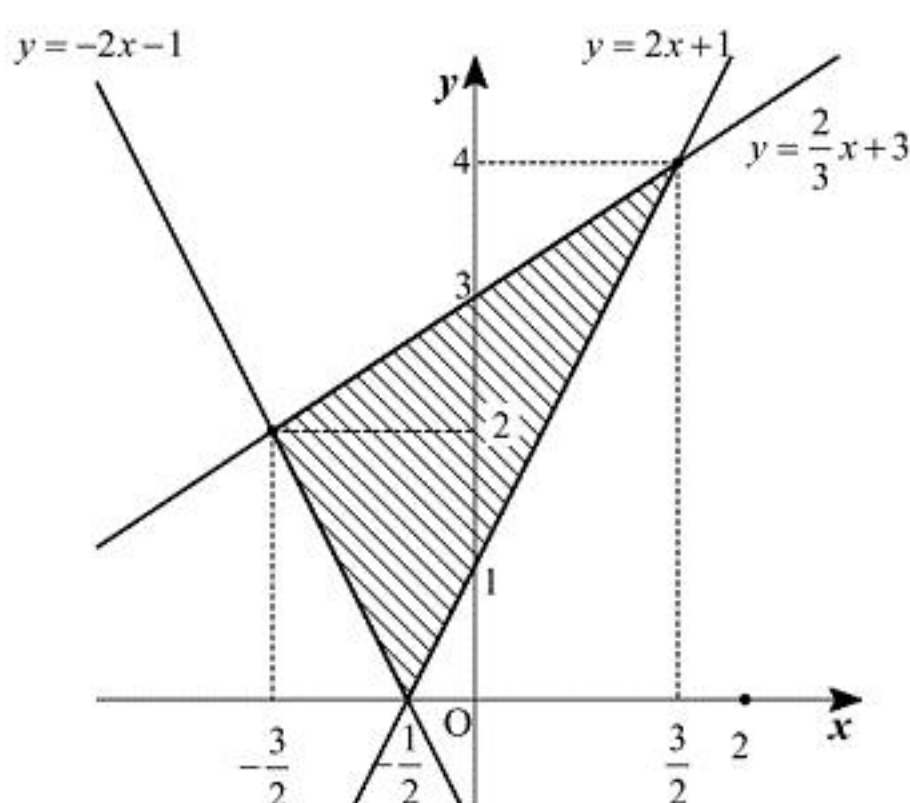
より $(\frac{3}{2}, 4)$ であり、直線 $y=-2x-1$ と直線 $y=\frac{2}{3}x+3$ の交点の座標は、

$$-2x-1=\frac{2}{3}x+3$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{3}x=-4$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$$

より、 $(-\frac{3}{2}, 2)$ である。以上から、領域 D は以下の図の斜線部となる。境界線を含む。



(答) 前図(斜線部, 境界線を含む)

(2)

$k = x^2 - 4x + y^2$ とおく。これを変形すると、

$$k+4 = (x-2)^2 + y^2$$

となる。したがって、 $k+4$ は領域 D 内の点と点 $(2, 0)$ との距離の 2 乗となる。(1)で示した図より、 $k+4$ の最小値は、点 $(2, 0)$ と直線 $2x-y+1=0$ の距離 d の 2 乗である。ここで、

$$d = \frac{|2 \cdot 2 - 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

であるから、

$$m+4 = d^2 = 5$$

$$\therefore m = 1$$

となる。ここで、 $k=1$ となる点と点 $(2, 0)$ を結ぶ直線 l は、 $y=2x+1$ と直交する。直線 l は傾き $-\frac{1}{2}$ で点 $(2, 0)$ を通るから、この直線の方程式は、

$$y = -\frac{1}{2}(x-2) = -\frac{1}{2}x+1$$

である。直線 l と $y=2x+1$ の交点の座標を考える。2 式を連立して y を消去すると、

$$-\frac{1}{2}x+1=2x+1$$

$$\therefore x = 0$$

より、求める点の座標は $(0, 1)$ である。一方、最大値 M をとるときの領域 D の点は、領域 D の頂点 $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(-\frac{3}{2}, 2)$, $(\frac{3}{2}, 4)$ のいずれかである。 $k = x^2 - 4x + y^2$ にこれらを代入すると、

$$(-\frac{1}{2}, 0) \text{ のとき } k = (-\frac{1}{2})^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) + 0 = \frac{9}{4}$$

$$(-\frac{3}{2}, 2) \text{ のとき } k = (-\frac{3}{2})^2 - 4 \cdot (-\frac{3}{2}) + 2^2 = \frac{49}{4}$$

$$(\frac{3}{2}, 4) \text{ のとき } k = (\frac{3}{2})^2 - 4 \cdot (\frac{3}{2}) + 4^2 = \frac{49}{4}$$

となり、以上を比較すると、点 $(-\frac{3}{2}, 2)$, $(\frac{3}{2}, 4)$ で $M = \frac{49}{4}$ となる。

(答) 点 $(0, 1)$ で $m=1$, 点 $(-\frac{3}{2}, 2)$, $(\frac{3}{2}, 4)$ で $M = \frac{49}{4}$

【2】

(1)

さいころを1回振ったときの目の出方は同様に確からしく、その確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ である。さいころの出た目がそのまま x_1 となるから、期待値は

$$\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$$

である。

(答) $\frac{7}{2}$

(2)

1回で終了する場合は、1回目に1の目が出るときであるから、確率は $\frac{1}{6}$ である。2回で終了する場合は、1回目に2の目が出て2回目に偶数の目が出るときである。したがって、求める確率は、

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

である。

(答) $\frac{1}{4}$

(3)

$x_1=1$ 以外の時の1回目と2回目の点数の取り方を (x_1, x_2) の形で列挙すると、

$$(2, 1), (2, 2), (3, 10), (3, 3), (4, 2), (4, 4), (5, 16), (5, 5), (6, 3), (6, 6)$$

となる。また、1回目のそれぞれの点数の取り方は $\frac{1}{6}$ であり、2回目以降の点数のとりうる確率は偶奇のみによるから、同様に確からしく、 $\frac{1}{2}$ となる。規則を見ると、2回目以降にこのゲームが終了するとき、終了の1回前の得点が2となり、その後に偶数の目が出て終了するという順序が必ず起こる。3回で終了する場合は、 $x_2=2$ となって3回目に偶数の目が出るときである。このとき (x_1, x_2) の取り方は $(2, 2), (4, 2)$ である。よって、3回で終了する確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{12}$$

となる。(2)の結果を用いて、3回以下で終了する確率は

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

となる。

(答) $\frac{1}{3}$

(4)

(3)の議論を拡張して、 $x_i=1$ 以外の場合の i 回目と $i+1$ 回目の点数の取り方を挙げることを考える。(3)より、2回目以降には、1から6に加えて得点が16, 10をとる場合が存在する。 $x_i=16$ のとき、 $x_{i+1}=16, 8$ をとりうる。また、 $x_i=10$ のとき、 $x_{i+1}=10, 5$ をとりうる。これにより3回目以降には以上に加えて得点が8をとる場合が存在する。 $x_i=8$ のとき、 $x_{i+1}=8, 4$ をとりうる。以上の議論から、 $x_i=1$ 以外の場合の i 回目と $i+1$ 回目の点数の取り方を (x_i, x_{i+1}) の形で列挙すると、

$$(2, 1), (2, 2), (3, 10), (3, 3), (4, 2), (4, 4), (5, 16), (5, 5), (6, 3), (6, 6), \\ (8, 4), (8, 8), (10, 5), (10, 10), (16, 8), (16, 16)$$

$$(x_i=8をとるのはi\geq 3, x_i=10をとるのはi\geq 2, x_i=16をとるのはi\geq 2)$$

となる。これを用いて4回から6回で終了する確率を求める。

[1] 4回で終了するとき

点数の取り方を (x_1, x_2, x_3, x_4) の形で挙げると、

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)=(2, 2, 2, 1), (4, 2, 2, 1), (4, 4, 2, 1)$$

となる。この確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{1}{16}$$

である。

[2] 5回で終了するとき

点数の取り方を $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ の形で挙げると、

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=(2, 2, 2, 2, 1), (4, 2, 2, 2, 1), (4, 4, 2, 2, 1), (4, 4, 4, 2, 1)$$

となる。この確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4=\frac{1}{24}$$

である。

[3] 6回で終了するとき

点数の取り方を $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ の形で挙げると、

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)=(2, 2, 2, 2, 2, 1), (4, 2, 2, 2, 2, 1), (4, 4, 2, 2, 2, 1), \\ (4, 4, 4, 2, 2, 1), (4, 4, 4, 4, 2, 1), (5, 16, 8, 4, 2, 1)$$

となる。この確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6=\frac{1}{32}$$

である。

以上[1]から[3]と(3)の結果を用いると、求める確率は

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{32}=\frac{15}{32}$$

となる。

(答) $\frac{15}{32}$

〔3〕

(1)

$2n^2 + 6n + 4 = 2(n+1)(n+2)$ である。漸化式を $(n+1)(n+2)$ ($n \geq 1$ において正) で割ると,

$$\frac{a_{n+1}}{n+2} - \frac{3a_n}{n+1} = 2$$

となる。ここで、 $b_n = \frac{a_n}{n+1}$ を適用すると

$$b_{n+1} - 3b_n = 2 \Leftrightarrow b_{n+1} = 3b_n + 2$$

となる。

(答) $b_{n+1} = 3b_n + 2$

(2)

漸化式 $b_{n+1} = 3b_n + 2$ を変形すると

$$b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$$

となる。数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = \frac{a_1}{2} + 1 = 2$ 、公比 3 の等比数列である。したがって、数列 $\{b_n\}$

の一般項は

$$\begin{aligned} b_n + 1 &= 2 \cdot 3^{n-1} \\ \therefore b_n &= 2 \cdot 3^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $b_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$

(3)

b_n の置き換えの定義から,

$$a_n = (n+1)b_n = (n+1)(2 \cdot 3^{n-1} - 1)$$

である。

(答) $a_n = (n+1)(2 \cdot 3^{n-1} - 1)$

〔4〕

(1)

曲線 C について $y' = 2x$ であるから、求める接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y - a^2 &= 2a(x - a) \\ \therefore y &= 2ax - a^2 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = 2ax - a^2$$

(2)

接点の x 座標は、直線 ℓ の方程式と曲線 C の方程式を連立して y を消去すると、

$$\begin{aligned} (x+b)^2 - b^2 &= 2ax - a^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2(a-b)x + a^2 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

の解である。このとき直線 ℓ と曲線 C は接しているため、重解となる。①の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (a-b)^2 - a^2 \\ &= 0 \\ \Leftrightarrow b(b-2a) &= 0 \end{aligned}$$

である。 $b \neq 0$ であるから、 $b = 2a$ となる。①に代入すると、

$$\begin{aligned} x^2 + 2ax + a^2 &= 0 \\ \therefore x &= -a \end{aligned}$$

となり、点 Q の x 座標が求まる。直線 ℓ の式 $y = 2ax - a^2$ に代入すると、点 Q の y 座標は

$$y = 2a \cdot (-a) - a^2 = -3a^2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b = 2a, Q(-a, -3a^2)$$

(3)

曲線 C' の方程式は

$$y = (x+2a)^2 - (2a)^2 = x^2 + 4ax$$

である。頂点は $(-2a, -4a^2)$ であるから、この x 座標は負である。2 曲線 C, C' の交点の x 座標は、2 方程式を連立して y を消去すると、

$$x^2 = x^2 + 4ax$$

の解であるから、 $x = 0$ である。2 曲線 C, C' についての接線 ℓ の接点の x 座標は $x = a, -a$ である。よって求める面積は、

$$\begin{aligned} &\int_{-a}^0 \{(x^2 + 4ax) - (2ax - a^2)\} dx + \int_0^a \{x^2 - (2ax - a^2)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + a^2x \right]_{-a}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x \right]_0^a \\ &= \left(\frac{1}{3}a^3 - a^3 + a^3 \right) + \left(\frac{1}{3}a^3 - a^3 + a^3 \right) \\ &= \frac{2}{3}a^3 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3}a^3$$

〔5〕

(1)

$y=x^2$ 上の点の y 座標について、 $y \geq 0$ が成り立つ。 $y=x^2$ を $x^2+y^2=2$ に代入して

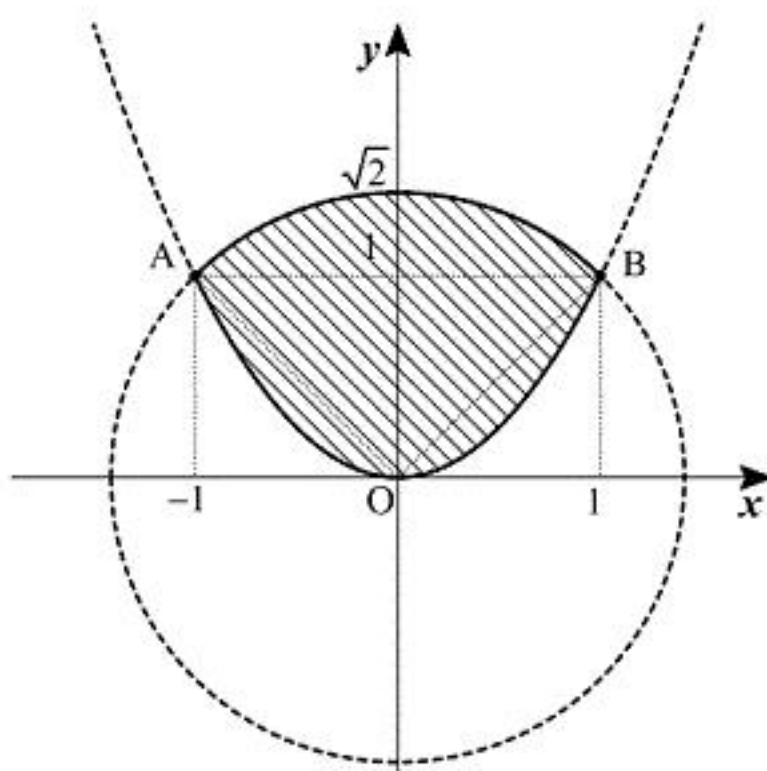
$$\begin{aligned} y+y^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow y^2+y-2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (y-1)(y+2) &= 0 \\ \therefore y &= 1, -2 \end{aligned}$$

が得られる。 $y \geq 0$ を満たす解は $y=1$ であり、これが求める交点の y 座標となる。 $y=x^2$ に代入して x について解くと $x=\pm 1$ となる。以上から交点は $(-1, 1), (1, 1)$ の2点となる。

(答) $(-1, 1), (1, 1)$

(2)

放物線 $y=x^2$ と円 $x^2+y^2=2$ を境界とする領域 D を示すと以下のようになる。ただし境界線を含む。



(答) 前図

(3)

線分 OA, OB を引く。 OA の方程式は $y=-x$ 、 OB の方程式は $y=x$ であるから、2 線分は直交する。よって、領域 D は円の $\frac{1}{4}$ 分の扇形 OAB とそれ以外の部分に分かれる。対称性から、扇形でない部分の面積は、

$$2 \int_0^1 (x-x^2) dx = 2 \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

である。円の半径は $\sqrt{2}$ であるから、扇形の面積は $2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$ である。以上から求める面積は

$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$ である。

(答) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$

(4)

円の方程式について、 $x^2=2-y^2$ とかける。また、放物線の方程式について、 $x^2=y$ とかける。これを用いて、求める体積は、

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{\sqrt{2}} x^2 dy &= \pi \int_0^1 y dy + \pi \int_1^{\sqrt{2}} (2-y^2) dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_0^1 + \pi \left[2y - \frac{1}{3}y^3 \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{2} + \left(2\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2} \right) - \frac{5}{6} \right\} \\ &= \frac{8\sqrt{2}-7}{6} \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8\sqrt{2}-7}{6} \pi$