

〔1〕

(1)

$y \geq |2x+1|$ について、 $2x+1=0$ の解は $x=-\frac{1}{2}$ であるから、絶対値を外すと、

$$y \geq 2x+1 \left(x \geq -\frac{1}{2} \right), \quad y \geq -2x-1 \left(x \leq -\frac{1}{2} \right)$$

となる。また、 $2x-3y+9 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{2}{3}x+3$ である。直線 $y=2x+1$ と直線 $y=\frac{2}{3}x+3$ の交点の座標は、

$$2x+1=\frac{2}{3}x+3$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}x=2$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

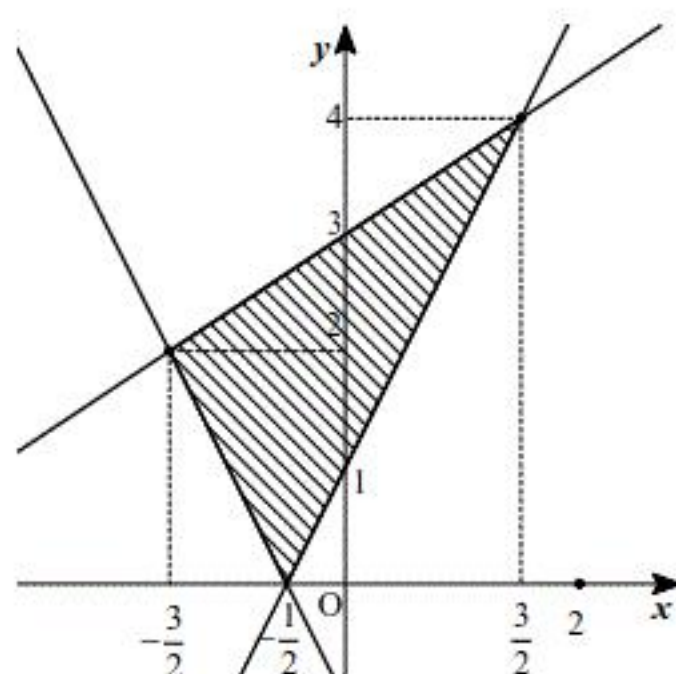
より $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ であり、直線 $y=-2x-1$ と直線 $y=\frac{2}{3}x+3$ の交点の座標は、

$$-2x-1=\frac{2}{3}x+3$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{3}x=-4$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$$

より、 $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ である。以上から、領域 D は以下の図の斜線部となる。境界線を含む。



(答) 前図(斜線部, 境界線を含む)

(2)

$k=x^2-4x+y^2$ とおく。これを変形すると、

$$k+4=(x-2)^2+y^2$$

となる。したがって、 $k+4$ は領域 D 内の点と点 $(2, 0)$ との距離の 2 乗となる。(1) で示した図より、 $k+4$ の最小値は、点 $(2, 0)$ と直線 $2x-y+1=0$ の距離 d の 2 乗である。ここで、

$$d=\frac{|2 \cdot 2 - 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

であるから、

$$m+4=d^2=5$$

$$\therefore m=1$$

となる。ここで、 $k=1$ となる点と点 $(2, 0)$ を結ぶ直線 l は、 $y=2x+1$ と直交する。直線 l は傾き $-\frac{1}{2}$ で点 $(2, 0)$ を通るから、この直線の方程式は、

$$y=-\frac{1}{2}(x-2)=-\frac{1}{2}x+1$$

である。直線 l と $y=2x+1$ の交点の座標を考える。2 式を連立して y を消去すると、

$$-\frac{1}{2}x+1=2x+1$$

$$\therefore x=0$$

より、求める点の座標は $(0, 1)$ である。一方、最大値 M をとるときの領域 D の点は、領域 D の頂点 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{3}{2}, 2\right), \left(\frac{3}{2}, 4\right)$ のいずれかである。 $k=x^2-4x+y^2$ にこれらを代入すると、

$$\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \text{ のとき } k=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)+0=\frac{9}{4}$$

$$\left(-\frac{3}{2}, 2\right) \text{ のとき } k=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)+2^2=\frac{49}{4}$$

$$\left(\frac{3}{2}, 4\right) \text{ のとき } k=\left(\frac{3}{2}\right)^2-4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)+4^2=\frac{49}{4}$$

となり、以上を比較すると、点 $\left(-\frac{3}{2}, 2\right), \left(\frac{3}{2}, 4\right)$ で $M=\frac{49}{4}$ となる。

(答) 点 $(0, 1)$ で $m=1$, 点 $\left(-\frac{3}{2}, 2\right), \left(\frac{3}{2}, 4\right)$ で $M=\frac{49}{4}$

〔2〕

(1)

さいころを1回振ったときの目の出方は同様に確からしく、その確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ である。さ

いころの出た目がそのまま x_1 となるから、期待値は

$$\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$$

である。

(答) $\frac{7}{2}$

(2)

1回で終了する場合は、1回目に1の目が出るときであるから、確率は $\frac{1}{6}$ である。2回で終了す

る場合は、1回目に2の目が出て2回目に偶数の目が出るときである。したがって、求める確率は、

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

である。

(答) $\frac{1}{4}$

(3)

$x_1=1$ 以外の時の1回目と2回目の点数の取り方を (x_1, x_2) の形で列挙すると、

$$(2, 1), (2, 2), (3, 10), (3, 3), (4, 2), (4, 4), (5, 16), (5, 5), (6, 3), (6, 6)$$

となる。また、1回目のそれぞれの点数の取り方は $\frac{1}{6}$ であり、2回目以降の点数のとりうる確

率は偶奇のみによるから、同様に確からしく、 $\frac{1}{2}$ となる。規則を見ると、2回目以降にこのゲ

ームが終了するとき、終了の1回前の得点が2となり、その後に偶数の目が出て終了するという順序が必ず起こる。3回で終了する場合は、 $x_2=2$ となって3回目に偶数の目が出るとき

である。このとき (x_1, x_2) の取り方は $(2, 2), (4, 2)$ である。よって、3回で終了する確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{12}$$

となる。(2)の結果を用いて、3回以下で終了する確率は

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

となる。

(答) $\frac{1}{3}$

(4)

(3)の議論を拡張して、 $x_i=1$ 以外の場合の i 回目と $i+1$ 回目の点数の取り方を挙げることを考える。(3)より、2回目以降には、1から6に加えて得点が16, 10をとる場合が存在する。 $x_i=16$

のとき、 $x_{i+1}=16, 8$ をとりうる。また、 $x_i=10$ のとき、 $x_{i+1}=10, 5$ をとりうる。これにより3回目以降には以上に加えて得点が8をとる場合が存在する。 $x_i=8$ のとき、 $x_{i+1}=8, 4$ をとりうる。

以上の議論から、 $x_i=1$ 以外の場合の i 回目と $i+1$ 回目の点数の取り方を (x_i, x_{i+1}) の形で列挙すると、

$$(2, 1), (2, 2), (3, 10), (3, 3), (4, 2), (4, 4), (5, 16), (5, 5), (6, 3), (6, 6), \\ (8, 4), (8, 8), (10, 5), (10, 10), (16, 8), (16, 16)$$

$$(x_i=8をとるのはi \geq 3, \quad x_i=10をとるのはi \geq 2, \quad x_i=16をとるのはi \geq 2)$$

となる。これを用いて4回から6回で終了する確率を求める。

[1] 4回で終了するとき

点数の取り方を (x_1, x_2, x_3, x_4) の形で挙げると、

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)=(2, 2, 2, 1), (4, 2, 2, 1), (4, 4, 2, 1)$$

となる。この確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{1}{16}$$

である。

[2] 5回で終了するとき

点数の取り方を $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ の形で挙げると、

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=(2, 2, 2, 2, 1), (4, 2, 2, 2, 1), (4, 4, 2, 2, 1), (4, 4, 4, 2, 1)$$

となる。この確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4=\frac{1}{24}$$

である。

[3] 6回で終了するとき

点数の取り方を $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ の形で挙げると、

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)=(2, 2, 2, 2, 2, 1), (4, 2, 2, 2, 2, 1), (4, 4, 2, 2, 2, 1), \\ (4, 4, 4, 2, 2, 1), (4, 4, 4, 4, 2, 1), (5, 16, 8, 4, 2, 1)$$

となる。この確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6=\frac{1}{32}$$

である。

以上[1]から[3]と(3)の結果を用いると、求める確率は

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{32}=\frac{15}{32}$$

となる。

(答) $\frac{15}{32}$

〔3〕

(1)

$2n^2 + 6n + 4 = 2(n+1)(n+2)$ である。漸化式を $(n+1)(n+2)$ ($n \geq 1$ において正) で割ると,

$$\frac{a_{n+1}}{n+2} - \frac{3a_n}{n+1} = 2$$

となる。ここで、 $b_n = \frac{a_n}{n+1}$ を適用すると

$$b_{n+1} - 3b_n = 2 \Leftrightarrow b_{n+1} = 3b_n + 2$$

となる。

$$(答) \quad b_{n+1} = 3b_n + 2$$

(2)

漸化式 $b_{n+1} = 3b_n + 2$ を変形すると

$$b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$$

となる。数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = \frac{a_1}{2} + 1 = 2$, 公比 3 の等比数列である。したがって, 数列 $\{b_n\}$

の一般項は

$$b_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore b_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$$

である。

$$(答) \quad b_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$$

(3)

b_n の置き換えの定義から,

$$a_n = (n+1)b_n = (n+1)(2 \cdot 3^{n-1} - 1)$$

である。

$$(答) \quad a_n = (n+1)(2 \cdot 3^{n-1} - 1)$$

〔4〕

(1)

曲線 C について $y' = 2x$ であるから、求める接線 ℓ の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a)$$

$$\therefore y = 2ax - a^2$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = 2ax - a^2$$

(2)

接点の x 座標は、直線 ℓ の方程式と曲線 C の方程式を連立して y を消去すると、

$$(x + b)^2 - b^2 = 2ax - a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2(a - b)x + a^2 = 0 \quad \cdots \text{①}$$

の解である。このとき直線 ℓ と曲線 C は接しているため、重解となる。①の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (a - b)^2 - a^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow b(b - 2a) = 0$$

である。 $b \neq 0$ であるから、 $b = 2a$ となる。①に代入すると、

$$x^2 + 2ax + a^2 = 0$$

$$\therefore x = -a$$

となり、点 Q の x 座標が求まる。直線 ℓ の式 $y = 2ax - a^2$ に代入すると、点 Q の y 座標は

$$y = 2a \cdot (-a) - a^2 = -3a^2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b = 2a, Q(-a, -3a^2)$$

(3)

曲線 C' の方程式は

$$y = (x + 2a)^2 - (2a)^2 = x^2 + 4ax$$

である。頂点は $(-2a, -4a^2)$ であるから、この x 座標は負である。2 曲線 C, C' の交点の x 座標は、2 方程式を連立して y を消去すると、

$$x^2 = x^2 + 4ax$$

の解であるから、 $x = 0$ である。2 曲線 C, C' についての接線 ℓ の接点の x 座標は $x = a, -a$ である。よって求める面積は、

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^0 \{(x^2 + 4ax) - (2ax - a^2)\} dx + \int_0^a \{x^2 - (2ax - a^2)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + a^2x \right]_{-a}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x \right]_0^a \\ &= \left(\frac{1}{3}a^3 - a^2 + a^3 \right) + \left(\frac{1}{3}a^3 - a^2 + a^3 \right) \\ &= \frac{2}{3}a^3 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3}a^3$$