

〔1〕

(1)

点Pの座標を (x, y) とする。

$$PO:PA=3:1 \Leftrightarrow PO^2:PA^2=9:1$$

であるから、

$$x^2+y^2=9\{(x-4)^2+y^2\}$$

と書ける。これを変形すると、

$$8x^2-72x+144+8y^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-9x+18+y^2=0$$

・・・①

$$\therefore \left(x-\frac{9}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$$

となる。よって求める軌跡は円 $\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$ 、すなわち点 $\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ を中心とした半径 $\frac{3}{2}$ の円である。

$$(\text{答}) \left(x-\frac{9}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$$

(2)

点Pの座標を (x, y) とする。

$$PO:PB=3:r \Leftrightarrow PO^2:PB^2=9:r^2$$

であるから、

$$r^2(x^2+y^2)=9\{x^2+(y-3)^2\}$$

と書ける。これを変形すると、

$$(r^2-9)x^2+(r^2-9)y^2+54y-81=0$$

・・・②

となる。よって求める軌跡は円 $(r^2-9)x^2+(r^2-9)y^2+54y-81=0$ である。

$$(\text{答}) (r^2-9)x^2+(r^2-9)y^2+54y-81=0$$

(3)

(1), (2)より、求める条件は①, ②の軌跡が共有点を持つ条件である。①, ②から x, y の2次の項を消去すると、

$$(54y-81)+9(r^2-9)x-18(r^2-9)=0$$

$$\Leftrightarrow (r^2-9)x+6y-2r^2+9=0$$

となる。これは直線の式となっている。(1)の結果から、求める条件はこの直線が円

$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$ と共有点を持つ条件である。すなわち直線 $(r^2-9)x+6y-2r^2+9=0$ と点

$\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ の距離が $\frac{3}{2}$ 以下である条件を求めればよい。したがって、

$$\frac{\left|(r^2-9)\cdot\frac{9}{2}+6\cdot 0-2r^2+9\right|}{\sqrt{(r^2-9)^2+6^2}}\leq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow |5r^2-63|\leq 3\sqrt{(r^2-9)^2+6^2}$$

となる。両辺ともに正であるため、2乗しても不等号は変わらないから

$$25r^4-630r^2+63^2\leq 9(r^4-18r^2+9\cdot 13)$$

$$\Leftrightarrow 16r^4-9(70-18)r^2+9^2(49-13)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4r^4-13\cdot 9r^2+9^3\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (r^2-9)(4r^2-81)\leq 0$$

$$\therefore 9\leq r^2\leq \frac{81}{4}$$

となる。 $r>3$ であるから、求める条件は

$$3< r\leq \frac{9}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) 3< r\leq \frac{9}{2}$$

〔2〕

(1)

さいころを1回振った時の目の出方は同様に確からしく、その確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ である。さいころの出た目がそのまま x_1 となるから、期待値は

$$\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$$

である。

(答) $\frac{7}{2}$

(2)

1回で終了する場合は、1回目に1の目が出るときであるから、確率は $\frac{1}{6}$ である。2回で終了する場合は、1回目に2の目が出て2回目に偶数の目が出るときである。したがって、求める確率は、

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

である。

(3)

$x_1=1$ 以外の時の1回目と2回目の点数の取り方を (x_1, x_2) の形で列挙すると、

$$(2, 1), (2, 2), (3, 10), (3, 3), (4, 2), (4, 4), (5, 16), (5, 5), (6, 3), (6, 6)$$

となる。また、1回目のそれぞれの点数の取り方は $\frac{1}{6}$ であり、2回目以降の点数のとりうる確率は偶奇のみによるから、同様に確からしく $\frac{1}{2}$ となる。規則を見ると、2回目以降にこのゲームが終了するとき、終了の1回前の得点が2となり、その後に偶数の目が出て終了するという順序が必ず起こる。3回で終了する場合は、 $x_2=2$ となって3回目に偶数の目が出るときである。このとき (x_1, x_2) の取り方は $(2, 2), (4, 2)$ である。よって、3回で終了する確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{12}$$

となる。(2)の結果を用いて、3回以下で終了する確率は

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

となる。

(答) $\frac{1}{3}$

(4)

(3)の議論を拡張して、 $x_i=1$ 以外の場合の i 回目と $i+1$ 回目の点数の取り方を挙げることを考える。(3)より、2回目以降には、1から6に加えて得点が16, 10をとる場合が存在する。 $x_i=16$ のとき、 $x_{i+1}=16, 8$ をとりうる。また、 $x_i=10$ のとき、 $x_{i+1}=10, 5$ をとりうる。これにより3回目以降には以上に加えて得点が8をとる場合が存在する。 $x_i=8$ のとき、 $x_{i+1}=8, 4$ をとりうる。以上の議論から、 $x_i=1$ 以外の場合の i 回目と $i+1$ 回目の点数の取り方を (x_i, x_{i+1}) の形で列挙すると、

$$(2, 1), (2, 2), (3, 10), (3, 3), (4, 2), (4, 4), (5, 16), (5, 5), (6, 3), (6, 6), \\ (8, 4), (8, 8), (10, 5), (10, 10), (16, 8), (16, 16)$$

$$(x_i=8\text{をとるのは }i\geq 3, x_i=10\text{をとるのは }i\geq 2, x_i=16\text{をとるのは }i\geq 2)$$

となる。これを用いて4回から6回で終了する確率を求める。

[1] 4回で終了するとき

点数の取り方を (x_1, x_2, x_3, x_4) の形で挙げると、

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)=(2, 2, 2, 1), (4, 2, 2, 1), (4, 4, 2, 1)$$

となる。この確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{1}{16}$$

である。

[2] 5回で終了するとき

点数の取り方を $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ の形で挙げると、

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=(2, 2, 2, 2, 1), (4, 2, 2, 2, 1), (4, 4, 2, 2, 1), (4, 4, 4, 2, 1)$$

となる。この確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4=\frac{1}{24}$$

である。

[3] 6回で終了するとき

点数の取り方を $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ の形で挙げると、

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)=(2, 2, 2, 2, 2, 1), (4, 2, 2, 2, 2, 1), (4, 4, 2, 2, 2, 1), \\ (4, 4, 4, 2, 2, 1), (4, 4, 4, 4, 2, 1), (5, 16, 8, 4, 2, 1)$$

となる。この確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6=\frac{1}{32}$$

である。

以上[1]から[3]と(3)の結果を用いると、求める確率は

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{32}=\frac{15}{32}$$

となる。

(答) $\frac{15}{32}$

[3]

(1)

解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 1$$

である。これを用いると、

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 4^2 - 2 \cdot 1 \\ &= 14\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= 4^3 - 3 \cdot 1 \cdot 4 \\ &= 52\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha^2 + \beta^2 = 14, \alpha^3 + \beta^3 = 52$$

(2)

数学的帰納法によりこれを示す。

[1] $n=1, 2$ のとき

(1)から $\alpha^n + \beta^n$ は偶数である。

[2] $n=k+2$ のとき

$n=k, k+1$ のとき $\alpha^n + \beta^n$ が偶数であると仮定すると

$$\begin{aligned}\alpha^{k+2} + \beta^{k+2} &= (\alpha^{k+1} + \beta^{k+1})(\alpha + \beta) - \alpha^{k+1}\beta - \alpha\beta^{k+1} \\ &= (\alpha^{k+1} + \beta^{k+1})(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^k + \beta^k) \\ &= 4(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}) - (\alpha^k + \beta^k)\end{aligned}$$

である。 $\alpha^k + \beta^k$ および $\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}$ は偶数であるから、 $4(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}) - (\alpha^k + \beta^k)$ すなわち

$\alpha^{k+2} + \beta^{k+2}$ も偶数である。

以上[1], [2]より、すべての自然数 n に対して $\alpha^n + \beta^n$ は偶数であることが示された。

(証明終)

(3)

2次方程式の解は $x = 2 \pm \sqrt{3}$ であるから、 $\alpha = 2 + \sqrt{3}$, $\beta = 2 - \sqrt{3}$ となる。ここで、 $0 < \beta < 1$ であるから、すべての自然数 n に対して $0 < \beta^n < 1$ が成り立つ。(2)の結果より、自然数 t を用いて

$$\alpha^n + \beta^n = 2t$$

とおける。したがって、

$$2t - 1 < 2t - \beta^n < 2t$$

である。また α^n について、

$$\alpha^n = 2t - \beta^n$$

が成り立つ。これにより $\alpha^n = 2t - \beta^n$ 以下の最大の整数は $2t - 1$ 、すなわち奇数であることが示された。

(証明終)

〔4〕

(1)

$y = x^2$ 上の点の y 座標について、 $y \geq 0$ が成り立つ。 $y = x^2$ を $x^2 + y^2 = 2$ に代入して

$$y + y^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y+2) = 0$$

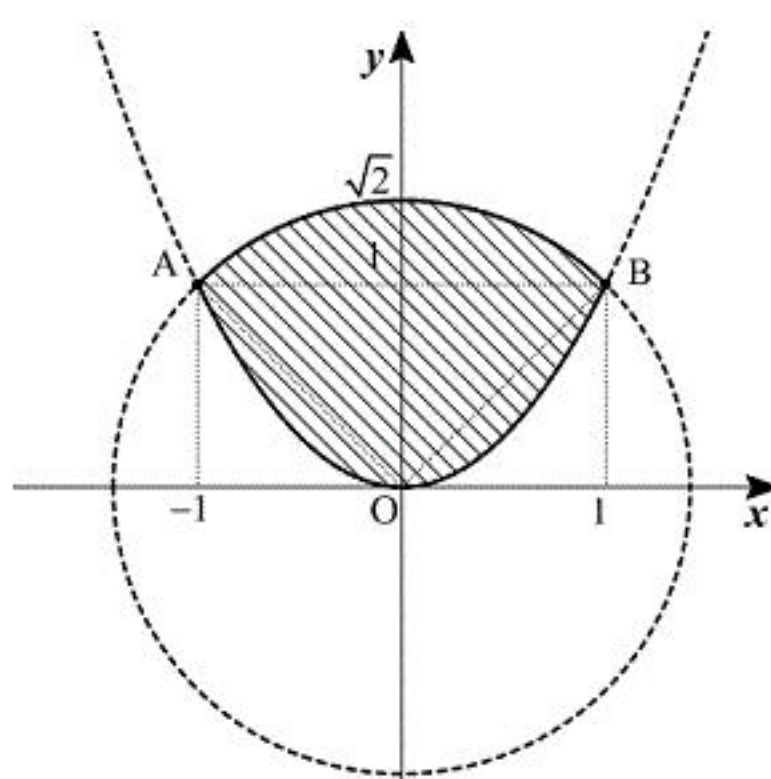
$$\therefore y = 1, -2$$

が得られる。 $y \geq 0$ を満たす解は $y = 1$ であり、これが求める交点の y 座標となる。 $y = x^2$ に代入して x について解くと $x = \pm 1$ となる。以上から交点は $(-1, 1), (1, 1)$ の2点となる。

(答) $(-1, 1), (1, 1)$

(2)

放物線 $y = x^2$ と円 $x^2 + y^2 = 2$ を境界とする領域 D を示すと以下のようになる。ただし境界線を含む。



(答) 前図

(3)

線分 OA, OB を引く。 OA の方程式は $y = -x$ 、 OB の方程式は $y = x$ であるから、2線分は直交する。よって、領域 D は円の $\frac{1}{4}$ 分の扇形 OAB とそれ以外の部分に分かれる。対称性から、扇形でない部分の面積は、

$$2 \int_0^1 (x - x^2) dx = 2 \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

である。円の半径は $\sqrt{2}$ であるから、扇形の面積は $2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$ である。以上から求める面積は

$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$ である。

(答) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$

(4)

円の方程式について、 $x^2 = 2 - y^2$ とかける。また、放物線の方程式について、 $x^2 = y$ とかける。これを用いて、求める体積は、

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{\sqrt{2}} x^2 dy &= \pi \int_0^1 y dy + \pi \int_1^{\sqrt{2}} (2 - y^2) dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 + \pi \left[2y - \frac{1}{3} y^3 \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{2} + \left(2\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2} \right) - \frac{5}{3} \right\} \\ &= \frac{8\sqrt{2} - 7}{6} \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8\sqrt{2} - 7}{6} \pi$