

【1】

(1)

$y \geq |2x+1|$ について、 $2x+1=0$ の解は $x=-\frac{1}{2}$ であるから、絶対値を外すと、

$$y \geq 2x+1 \left(x \geq -\frac{1}{2} \right), \quad y \geq -2x-1 \left(x \leq -\frac{1}{2} \right)$$

となる。また、

$$2x-3y+9 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y \leq \frac{2}{3}x+3$$

である。ところで、直線 $y=2x+1$ と直線 $y=\frac{2}{3}x+3$ の交点の座標は、

$$\begin{cases} y=2x+1 \\ y=\frac{2}{3}x+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ 2x+1=\frac{2}{3}x+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ \frac{4}{3}x=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\therefore (x, y) = \left(\frac{3}{2}, 4 \right)$$

となる。また、直線 $y=-2x-1$ と直線 $y=\frac{2}{3}x+3$ の交点の座標は

$$\begin{cases} y=-2x-1 \\ y=\frac{2}{3}x+3 \end{cases}$$

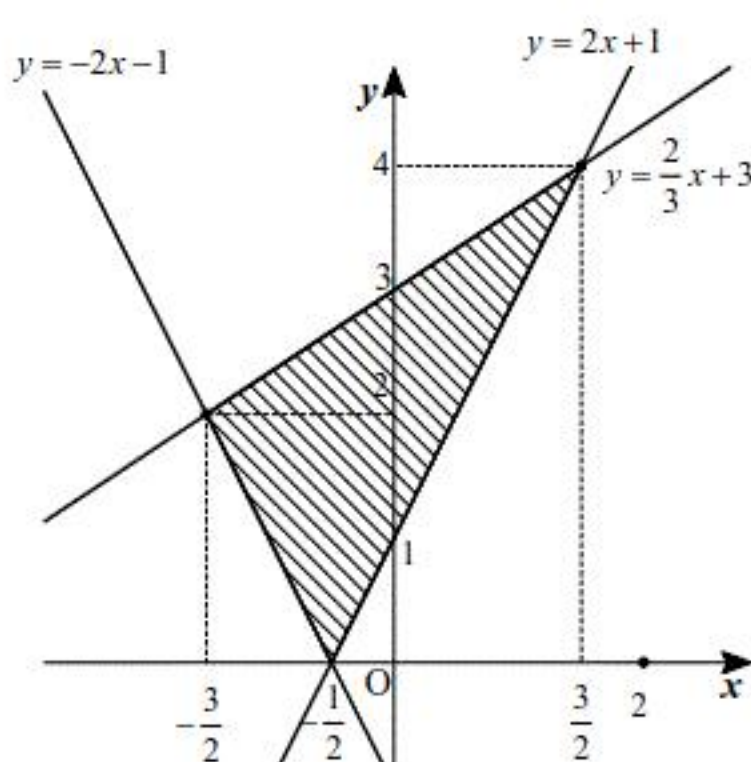
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ -2x-1=\frac{2}{3}x+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ \frac{8}{3}x=-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\therefore (x, y) = \left(-\frac{3}{2}, 2 \right)$$

となる。以上から、領域 D は以下の図の斜線部となる。境界線を含む。



(答) 前図(斜線部, 境界線を含む)

(2)

$k = x^2 - 4x + y^2$ とおく。これを変形すると、

$$k+4 = (x-2)^2 + y^2$$

となる。したがって、 $k+4$ は領域 D 内の点と点 $(2, 0)$ との距離の 2 乗となる。(1)で示した図より、 $k+4$ の最小値は、点 $(2, 0)$ と直線 $2x-y+1=0$ の距離 d の 2 乗である。ここで、

$$d = \frac{|2 \cdot 2 - 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

であるから、

$$m+4 = d^2 = 5$$

$$\therefore m = 1$$

となる。ここで、 $k=1$ となる点と点 $(2, 0)$ を結ぶ直線 l は、 $y=2x+1$ と直交する。直線 l は傾

き $-\frac{1}{2}$ で点 $(2, 0)$ を通るから、この直線の方程式は、

$$y = -\frac{1}{2}(x-2) = -\frac{1}{2}x+1$$

である。直線 l と $y=2x+1$ の交点の座標を考える。2 式を連立して y を消去すると、

$$-\frac{1}{2}x+1 = 2x+1$$

$$\therefore x = 0$$

より、求める点の座標は $(0, 1)$ である。一方、最大値 M をとるときの領域 D の点は、領域 D

の頂点 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ のいずれかである。 $k = x^2 - 4x + y^2$ にこれらを代入すると、

$$\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \text{ のとき } k = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 = \frac{9}{4}$$

$$\left(-\frac{3}{2}, 2\right) \text{ のとき } k = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 2^2 = \frac{49}{4}$$

$$\left(\frac{3}{2}, 4\right) \text{ のとき } k = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 4^2 = \frac{49}{4}$$

となり、以上を比較すると、点 $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ で $M = \frac{49}{4}$ となる。

(答) 点 $(0, 1)$ で $m=1$, 点 $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ で $M = \frac{49}{4}$

〔2〕

(1)

数列の定義に従って計算すると、

$$\begin{aligned} a_5 &= \frac{1}{2^5} \left(\sin \frac{5\pi}{2} + \cos \frac{5\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{32} (1+0) \\ &= \frac{1}{32} \\ a_6 &= \frac{1}{2^6} \left(\sin \frac{6\pi}{2} + \cos \frac{6\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{64} (0-1) \\ &= -\frac{1}{64} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad a_5 = \frac{1}{32}, a_6 = -\frac{1}{64}$$

(2)

l を自然数とする。 $n = 4l - 3$ のとき、

$$\begin{aligned} a_{4l-3} &= \frac{1}{2^{4l-3}} \left(\sin \frac{(4l-3)\pi}{2} + \cos \frac{(4l-3)\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2^{4l-3}} (1+0) \\ &= \frac{1}{2^{4l-3}} \end{aligned}$$

である。 $n = 4l - 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_{4l-2} &= \frac{1}{2^{4l-2}} \left(\sin \frac{(4l-2)\pi}{2} + \cos \frac{(4l-2)\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2^{4l-2}} (0-1) \\ &= -\frac{1}{2^{4l-2}} \end{aligned}$$

である。 $n = 4l - 1$ のとき、

$$\begin{aligned} a_{4l-1} &= \frac{1}{2^{4l-1}} \left(\sin \frac{(4l-1)\pi}{2} + \cos \frac{(4l-1)\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2^{4l-1}} (-1+0) \\ &= -\frac{1}{2^{4l-1}} \end{aligned}$$

である。 $n = 4l$ のとき、

$$\begin{aligned} a_{4l} &= \frac{1}{2^{4l}} \left(\sin \frac{4l\pi}{2} + \cos \frac{4l\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2^{4l}} (0+1) \\ &= \frac{1}{2^{4l}} \end{aligned}$$

である。ここで、 S_{4n} の式を変形すると

$$\begin{aligned} S_{4n} &= \sum_{k=1}^{4n} a_k \\ &= \sum_{l=1}^n (a_{4l-3} + a_{4l-2} + a_{4l-1} + a_{4l}) \\ &= \sum_{l=1}^n \left(\frac{1}{2^{4l-3}} - \frac{1}{2^{4l-2}} - \frac{1}{2^{4l-1}} + \frac{1}{2^{4l}} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \frac{1}{2^{4l}} (8 - 4 - 2 + 1) \\ &= 3 \cdot \sum_{l=1}^n \left(\frac{1}{16} \right)^l \end{aligned}$$

となる。したがって、 S_{4n} は初項 $\frac{3}{16}$ 、公比 $\frac{1}{16}$ の等比数列の第1項から第 n 項までの和となる。

したがって

$$\begin{aligned} S_{4n} &= 3 \cdot \sum_{l=1}^n \left(\frac{1}{16} \right)^l \\ &= \frac{\frac{3}{16} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{16} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{16}} \\ &= \frac{1}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{16} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \frac{1}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{16} \right)^n \right\}$$

(3)

$$0.1999 = 0.2 - 0.0001 = \frac{1}{5} - \frac{1}{10000} \text{ より、不等式は}$$

$$\begin{aligned} 0.1999 &< S_{4n} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{10000} &< \frac{1}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{16} \right)^n \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{10000} &< \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{16} \right)^n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2000} &> \left(\frac{1}{16} \right)^n \end{aligned}$$

となる。 $n = 2$ のとき $\left(\frac{1}{16} \right)^2 = \frac{1}{256} > \frac{1}{2000}$ 、 $n = 3$ のとき $\left(\frac{1}{16} \right)^3 = \frac{1}{4096} < \frac{1}{2000}$ であるから、

$\frac{1}{2000} > \left(\frac{1}{16} \right)^n$ となる最小の自然数 n は $n = 3$ である。

$$(答) \quad n = 3$$

[3]

(1)

点 D は辺 OA を 4:1 に内分する点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \frac{4}{4+1} \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{4}{5} \vec{a}\end{aligned}$$

である。点 E は辺 BC を 2:3 に内分する点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \frac{3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}}{2+3} \\ &= \frac{3\vec{b} + 2\vec{c}}{5}\end{aligned}$$

である。点 F は辺 DE を 3:2 に内分する点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= \frac{2\overrightarrow{OD} + 3\overrightarrow{OE}}{3+2} \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} \vec{a} + \frac{3}{5} \left(\frac{3}{5} \vec{b} + \frac{2}{5} \vec{c} \right) \\ &= \frac{8\vec{a} + 9\vec{b} + 6\vec{c}}{25}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OD} = \frac{4}{5} \vec{a}, \overrightarrow{OE} = \frac{3\vec{b} + 2\vec{c}}{5}, \overrightarrow{OF} = \frac{8\vec{a} + 9\vec{b} + 6\vec{c}}{25}$$

(2)

点 G は平面 ABC 上の点であるから、実数 r, s, t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \\ &= (1-s-t)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \\ &= r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

と書ける。ただし $r+s+t=1$ である。また、(1)の結果から、実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= k\overrightarrow{OF} \\ &= \frac{8\vec{a} + 9\vec{b} + 6\vec{c}}{25} k\end{aligned}$$

と書ける。OA, OB, OC は一次独立であるから、係数を比較して、

$$\begin{aligned}\frac{8+9+6}{25} k &= 1 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{25}{23}\end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{8\vec{a} + 9\vec{b} + 6\vec{c}}{25} \cdot \frac{25}{23} \\ &= \frac{8\vec{a} + 9\vec{b} + 6\vec{c}}{23}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{8\vec{a} + 9\vec{b} + 6\vec{c}}{23}$$

(3)

(2)より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{25}{23} \overrightarrow{OF} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OF} &= \frac{23}{25} \overrightarrow{OG}\end{aligned}$$

であるから、 $OF:FG = 23:(25-23) = 23:2$ となる。

$$(\text{答}) \quad OF:FG = 23:2$$