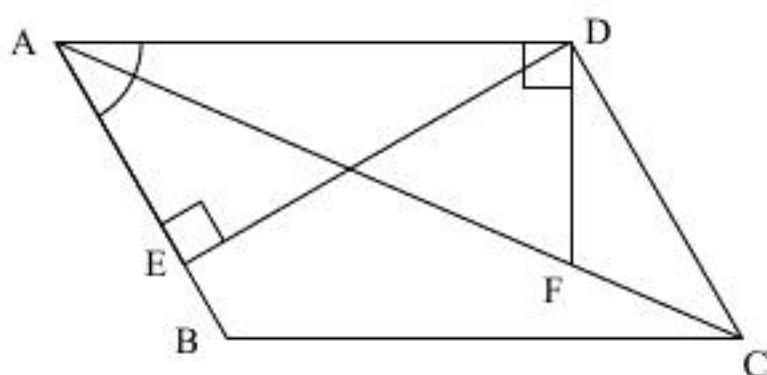


〔1〕

(1)

平行四辺形 ABCD と点 E, F を描くと以下のようになる。



$AB = t$, $AD = 6$, $\angle BAD = 60^\circ$ であるので

$$|\vec{a}| = t, |\vec{b}| = 6, \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 3t$$

である。また,

$$AE = AD \cos 60^\circ = 3$$

であることと点 E が半直線 AB 上にあることより,

$$\overrightarrow{AE} = |\overrightarrow{AE}| \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{3}{t} \vec{a}$$

である。点 F が線分 AC 上にあることより, k を実数として

$$\overrightarrow{AF} = k \overrightarrow{AC} = k(\vec{a} + \vec{b})$$

とおくと,

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD} = k(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b}$$

であるので, $\angle ADF = 90^\circ$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DF} &= 0 \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \{k(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b}\} = 0 \\ &\Leftrightarrow k(\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2) - |\vec{b}|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow k(3t + 36) = 36 \\ &\Leftrightarrow k = \frac{12}{t+12} \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\overrightarrow{AF} = \frac{12}{t+12}(\vec{a} + \vec{b})$$

である。

$$(答) \quad \overrightarrow{AE} = \frac{3}{t} \vec{a}, \overrightarrow{AF} = \frac{12}{t+12}(\vec{a} + \vec{b})$$

(2)

$\angle EDF < \angle ADF = 90^\circ$, $\angle DEF < 180^\circ - \angle DEA = 90^\circ$ であるので, $\triangle DEF$ が直角三角形のとき, $\angle EFD = 90^\circ$ となる。よって, AD と EF は平行となる。また, AD と BC も平行だから, EF と BC も平行となり, $\triangle AEF$ と $\triangle ABC$ は相似である。したがって,

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$$

であるので,

$$\frac{3}{t} = \frac{12}{t+12} \Leftrightarrow t = 4$$

である。

$$(答) \quad t = 4$$

〔2〕

(1)

頂点 B, C, D をまとめて X と呼ぶことにする。点 P が 2 秒後に頂点 A にいるとき、その移動の仕方は

$$A \rightarrow X \rightarrow A$$

である。 $A \rightarrow X$ となる確率は 1 であり、この後 $X \rightarrow A$ となる確率は $\frac{1}{5}$ だから、求める確率は

$$a_2 = 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

である。

$$(\text{答}) \ a_2 = \frac{1}{5}$$

(2)

点 P が 3 秒後に頂点 A にいるとき、その移動の仕方は

$$A \rightarrow X \rightarrow X \rightarrow A$$

である。 $A \rightarrow X$ となる確率は 1 であり、この後 $X \rightarrow X$ となる確率は $\frac{4}{5}$ であり、この後 $X \rightarrow A$

となる確率は $\frac{2}{5}$ だから、求める確率は

$$a_3 = 1 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{25}$$

である。

$$(\text{答}) \ a_3 = \frac{8}{25}$$

(3)

点 P が 4 秒後に頂点 A にいるとき、その移動の仕方は

$$A \rightarrow X \rightarrow X \rightarrow X \rightarrow A$$

または

$$A \rightarrow X \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow A$$

である。 $A \rightarrow X \rightarrow X \rightarrow X \rightarrow A$ の場合の確率は

$$1 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{24}{125}$$

である。また、 $A \rightarrow X \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow A$ の場合の確率は

$$1 \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

である。よって、求める確率は

$$a_4 = \frac{24}{125} + \frac{1}{25} = \frac{29}{125}$$

である。

$$(\text{答}) \ a_4 = \frac{29}{125}$$

[3]

(1)

$f(x)$ を平方完成すると,

$$f(x) = (a^2 + 1) \left(x + \frac{2a}{a^2 + 1} \right)^2 - \frac{4a^2}{a^2 + 1}$$

となるので, $f(x)$ の最小値は $-\frac{4a^2}{a^2 + 1}$ である。すべての実数 x に対して, $f(x) > -2$ が成立す

るための a の範囲は,

$$\begin{aligned} -\frac{4a^2}{a^2 + 1} > -2 &\Leftrightarrow -4a^2 > -2(a^2 + 1) \quad (\because a^2 + 1 > 0) \\ &\Leftrightarrow a^2 < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < a < 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $-1 < a < 1$

(2)

$a^2 + 1 > 0$ より, 示すべき不等式を同値変形すると,

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{2a}{a^2 + 1} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -(a^2 + 1) \leq 2a \\ 2a \leq a^2 + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 \geq 0 & \dots \textcircled{1} \\ (a-1)^2 \geq 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases} \end{aligned}$$

となり, ①と②式は両方ともすべての実数 a で成立するので, 与えられた不等式は成立する。

(証明終)

(3)

$y = f(x)$ は軸が $x = -\frac{2a}{a^2 + 1}$ である下に凸の放物線であり, (2)より $-1 \leq -\frac{2a}{a^2 + 1} \leq 1$ となるこ

とから, n を整数としたときの $f(n)$ の最小値は $f(-1), f(0), f(1)$ のうち最小のものに一致する。したがって, 「すべての整数 n に対して $f(n) > -2$ となること」と「 $f(-1) > -2$ かつ $f(0) > -2$ かつ $f(1) > -2$ 」は同値である。

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f(-1) > -2 \\ f(0) > -2 \\ f(1) > -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4a + 1 > -2 \\ 0 > -2 \\ a^2 + 4a + 1 > -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)(a-1) > 0 \\ (a+3)(a+1) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (a < -3 \text{ または } 3 < a) \text{ かつ } (a < -3 \text{ または } -1 < a) \\ &\therefore a < -3, -1 < a < 1, 3 < a \end{aligned}$$

より, 求める a の範囲は $a < -3, -1 < a < 1, 3 < a$ である。

(答) $a < -3, -1 < a < 1, 3 < a$

[4]

(1)

$t = 2^x + 2^{-x}$ より

$$\begin{aligned} t^2 &= (2^x + 2^{-x})^2 \\ &= 4^x + 4^{-x} + 2 \\ \therefore 4^x + 4^{-x} &= t^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^3 &= (2^x + 2^{-x})^3 \\ &= 8^x + 8^{-x} + 3(2^x + 2^{-x}) \\ &= 8^x + 8^{-x} + 3t \end{aligned}$$

$$\therefore 8^x + 8^{-x} = t^3 - 3t$$

である。

$$(答) \quad 4^x + 4^{-x} = t^2 - 2, \quad 8^x + 8^{-x} = t^3 - 3t$$

(2)

$2^x > 0, 2^{-x} > 0$ であるので、相加・相乗平均の関係より

$$t \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

であり、等号は

$$2^x = 2^{-x} \Leftrightarrow 4^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

より $x=0$ で成立する。また、 $t = 2^x + 2^{-x}$ は実数全体で定義された連続関数であり $\lim_{x \rightarrow \infty} t = +\infty$ で

あるので、 t は 2 以上の任意の実数値をとり得る。よって、 t の値域は $t \geq 2$ である。

$$(答) \quad t \geq 2$$

(3)

(1)より、 $f(x)$ を t の式で表すと、

$$f(x) = t^3 + t^2 - 3t - 2$$

である。上式の右辺を $g(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} g'(t) &= 3t^2 + 2t - 3 \\ &= 3\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{10}{3} \end{aligned}$$

であり、 $t \geq 2$ より $g'(t) > 0$ である。よって、 $t \geq 2$ で $g(t)$ は単調増加であるので、 $g(t)$ は $t=2$ で最小値 $g(2)=4$ をとるから、 $f(x)$ の最小値は 4 となる。このとき、(2)より $x=0$ である。

$$(答) \quad \text{最小値 } 4 \quad (x=0 \text{ のとき})$$