

〔1〕

(1)

$y = f(x)$  は頂点が P の 2 次関数であるので、 $a \neq 0$  である実数  $a$  を用いて、

$$f(x) = a(x - \cos \theta)^2 + \sin \theta$$

とおける。 $y = f(x)$  のグラフは原点を通るので、

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\Leftrightarrow a \cos^2 \theta + \sin \theta = 0 \\ &\Leftrightarrow a = -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \quad (\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より } \cos \theta > 0) \end{aligned}$$

であるので、

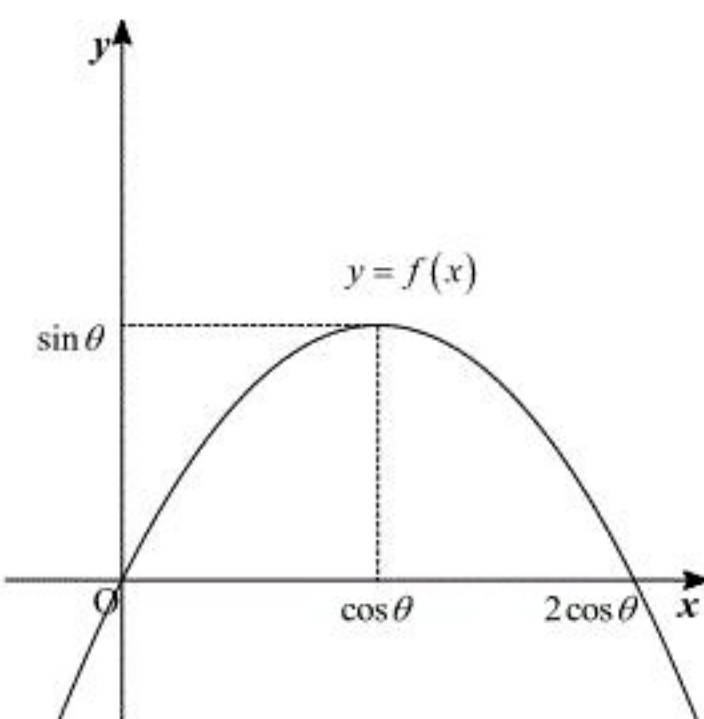
$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} (x - \cos \theta)^2 + \sin \theta \\ &= -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} x^2 + \frac{2 \sin \theta}{\cos \theta} x \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} x^2 + \frac{2 \sin \theta}{\cos \theta} x$$

(2)

$y = f(x)$  の図は以下のようになる。



よって、求める体積  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2 \cos \theta} \{f(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_0^{2 \cos \theta} \left( \frac{\sin^2 \theta}{\cos^4 \theta} x^4 - 2 \cdot \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} x^3 + \frac{4 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} x^2 \right) dx \\ &= \pi \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \left[ \frac{1}{5 \cos^2 \theta} x^5 - \frac{1}{\cos \theta} x^4 + \frac{4}{3} x^3 \right]_0^{2 \cos \theta} \\ &= \pi \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \left( \frac{1}{5} \cdot 2^5 - 2^4 + \frac{4}{3} \cdot 2^3 \right) \cos^3 \theta \\ &= \frac{16 \pi \sin^2 \theta \cos \theta}{15} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{16 \pi \sin^2 \theta \cos \theta}{15}$$

(2)より、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  における  $\frac{16 \pi \sin^2 \theta \cos \theta}{15}$  の最大値を求めればよい。 $g(\theta) = \sin^2 \theta \cos \theta$  とおくと  $t = \cos \theta$  ( $0 < t < 1$ ) として、

$$\begin{aligned} g(\theta) &= (1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \\ &= t - t^3 \end{aligned}$$

とかける。 $r(t) = t - t^3$  とおくと、

$$\begin{aligned} r'(t) &= 1 - 3t^2 \\ &= (1 - \sqrt{3}t)(1 + \sqrt{3}t) \end{aligned}$$

となるので、増減表をかくと

|         |   |     |                      |     |   |
|---------|---|-----|----------------------|-----|---|
| $t$     | 0 | ... | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | ... | 1 |
| $r'(t)$ |   | +   | 0                    | -   |   |
| $r(t)$  |   | ↗   | 最大                   | ↘   |   |

となり、 $r(t)$  は  $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$  で最大値  $\frac{2}{3\sqrt{3}}$  をとる。つまり、 $g(\theta) = \sin^2 \theta \cos \theta$  の最大値も  $\frac{2}{3\sqrt{3}}$  であるので、求める  $V$  の最大値は

$$V = \frac{16 \pi}{15} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{32 \sqrt{3} \pi}{135}$$

である。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{32 \sqrt{3} \pi}{135}$$

## [2]

$X=1-x^2$ とおくと、 $0 < x < 1$ より、 $0 < X < 1$ である。このとき、 $0 < X < \sqrt{X}$ となるので、

$1-x^2 < \sqrt{1-x^2}$ である。また、 $0 < x < 1$ の範囲で $f(x) = \sin x - x$ とおくと、

$f'(x) = \cos x - 1 < 0$  ( $\because 0 < x < 1$ )となり  $f(x)$  は  $0 < x < 1$  で単調減少であるので

$$f(x) < f(0) = 0$$

$$\therefore \sin x < x$$

である。これと  $1 < \frac{\pi}{2}$  より、 $0 < x < 1$  のとき  $0 < \sin x < x < 1$  となるから、

$$0 < \sin^2 x < x^2 < 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2} < \sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x \quad (\because 0 < x < 1 \text{ のとき } \cos x > 0)$$

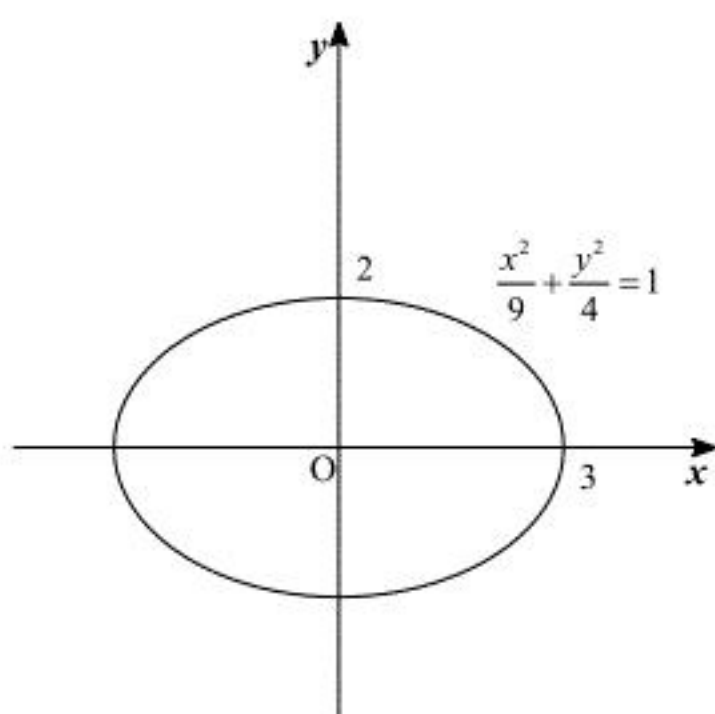
$$\therefore \sqrt{1-x^2} < \cos x$$

である。以上のことから、 $1-x^2 < \sqrt{1-x^2} < \cos x$  である。

$$(\text{答}) \quad 1-x^2 < \sqrt{1-x^2} < \cos x$$

〔3〕

楕円  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  の図を描くと以下のようになる。



[1]  $a=0$  のとき

直線の方程式は  $y=b$  となるので、この直線と楕円  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  とが  $y$  座標が正の相異なる2点で交わるためには上図より、 $0 < b < 2$  である。

[2]  $a \neq 0$  のとき

直線の式は  $x = \frac{1}{a}(y-b)$  と変形でき、これを楕円の式に代入すると、

$$\frac{\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow (4+9a^2)y^2 - 8by - (36a^2 - 4b^2) = 0$$

となる。直線  $y=ax+b$  と楕円  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  とが  $y$  座標が正の相異なる2点で交わることと、

$f(y) = (4+9a^2)y^2 - 8by - (36a^2 - 4b^2)$  としたとき、 $f(y)=0$  が  $0 < y \leq 2$  に相異なる2つの実数解を持つことは同値である。ここで、 $f(y)=0$  の判別式を  $D$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} > 0 &\Leftrightarrow (4b)^2 + (4+9a^2)(36a^2 - 4b^2) > 0 \\ &\Leftrightarrow 9a^2(9a^2 - b^2 + 4) > 0 \\ &\Leftrightarrow 9a^2 - b^2 + 4 > 0 \quad (\because a \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \frac{9}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2 > -1 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

となる。また、 $z=f(y)$  の軸  $y = \frac{4b}{4+9a^2}$  に関して

$$0 < \frac{4b}{4+9a^2} < 2 \Leftrightarrow 0 < b < \frac{9}{2}a^2 + 2 \quad \dots\dots ②$$

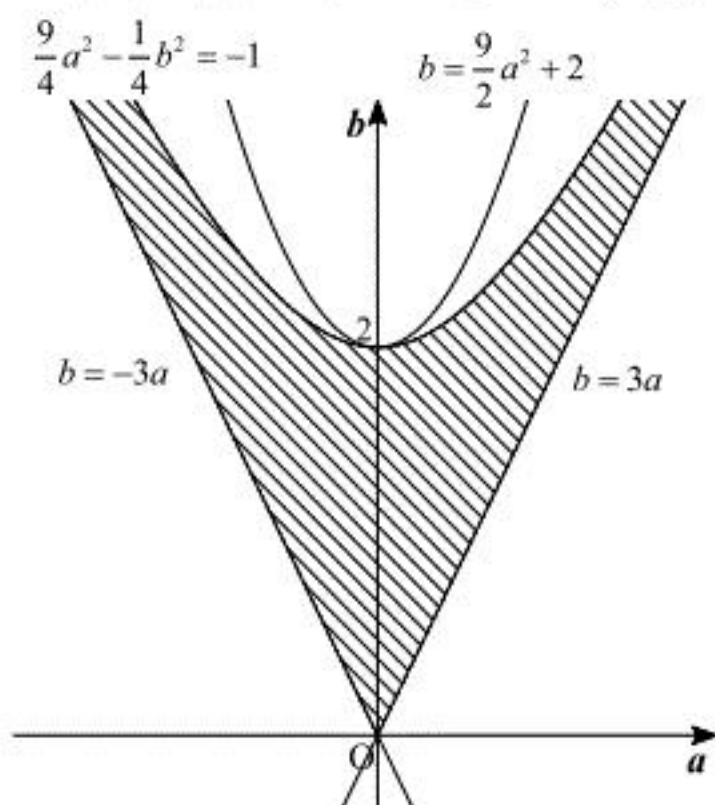
となり、端点に関して

$$\begin{aligned} f(0) > 0 &\Leftrightarrow -(36a^2 - 4b^2) > 0 \\ &\Leftrightarrow (3a+b)(3a-b) < 0 \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) \geq 0 &\Leftrightarrow 4(4+9a^2) - 16b - (36a^2 - 4b^2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (b-2)^2 \geq 0 \quad \dots\dots ④ \end{aligned}$$

となる。したがって、求める条件は「①かつ②かつ③かつ④」となる。

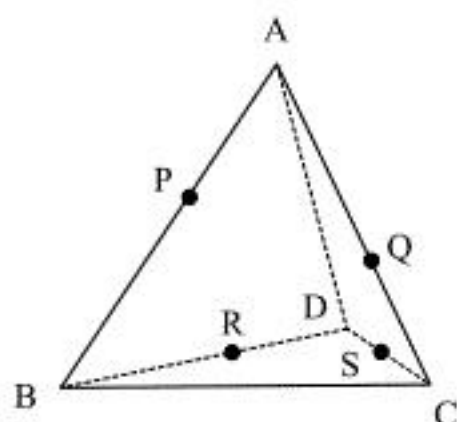
以上[1],[2]より、グラフを描くと下図のようになる。ただし、境界はすべて含まない。



(答) 前図の斜線部 (境界は含まない)

# 〔4〕

四面体 ABCD と点 P, Q, R, S を描くと下のようになる。



よって、実数  $s, t, u, v$  ( $0 < s, t, u, v < 1$ ) を用いて

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BR} = u\overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{CS} = v\overrightarrow{CD} \end{cases}$$

と表せる。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RD} &= \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CS}{SD} \Leftrightarrow \frac{s}{1-s} \cdot \frac{u}{1-u} = \frac{t}{1-t} \cdot \frac{v}{1-v} \\ &\Leftrightarrow su(1-t)(1-v) = tv(1-s)(1-u) \\ &\Leftrightarrow su - stu - suv = tv - tvs - tvu \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

より①式を示せばよい。  $\overrightarrow{AR} = (1-u)\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{AS} = (1-v)\overrightarrow{AC} + v\overrightarrow{AD}$  より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} \\ \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP} \\ \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AP} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = -s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{PR} = (1-s-u)\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{PS} = -s\overrightarrow{AB} + (1-v)\overrightarrow{AC} + v\overrightarrow{AD} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。4点 P, Q, R, S は同一平面上にあることより、実数  $m, n$  を用いて

$$\overrightarrow{PQ} = m\overrightarrow{PR} + n\overrightarrow{PS}$$

とかけるので、上の式を代入すると

$$\begin{aligned} -s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} &= m\{(1-s-u)\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AD}\} + n\{-s\overrightarrow{AB} + (1-v)\overrightarrow{AC} + v\overrightarrow{AD}\} \\ &\Leftrightarrow -s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} = \{m(1-s-u) - ns\}\overrightarrow{AB} + n(1-v)\overrightarrow{AC} + (mu + nv)\overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$  は一次独立であるので、上式において係数比較をすると、

$$\begin{cases} -s = m(1-s-u) - ns & \dots \textcircled{2} \\ t = n(1-v) & \dots \textcircled{3} \\ 0 = mu + nv & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

となる。③より  $n = \frac{t}{1-v}$  であり、この結果を④に代入して整理すると  $m = -\frac{v}{u} \cdot \frac{t}{1-v}$  である。よ

って、2式を②に代入すると、

$$\begin{aligned} -s &= -\frac{v}{u} \cdot \frac{t}{1-v} (1-s-u) - \frac{t}{1-v} \cdot s \\ &\Leftrightarrow u(1-v)s = vt(1-s-u) + uts \\ &\Leftrightarrow us - usv = vt - vts - vt u + uts \\ &\Leftrightarrow su - stu - suv = tv - tvs - tvu \end{aligned}$$

となり①式の成立が示された。

(証明終)