

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	
	4	1	1	
(2)	エ	オ	カ	キ
	1	1	0	8
(3)	ク	ケ	コ	サ
	7	2	1	6
(4)	シ	ス	セ	
	1	2	7	

【解説】

(1)

$a=6, b=6, c=1$ のとき、 p は最大となる。このとき、

$$p = \frac{5 \cdot 6 + 2 \cdot 6 - 1}{100} = \frac{30 + 12 - 1}{100} = \frac{41}{100}$$

である。また、 $a=1, b=1, c=6$ のとき、 p は最小となる。このとき、

$$p = \frac{5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 6}{100} = \frac{1}{100}$$

である。

(2)

3つのさいころの出る目 (a, b, c) の組み合わせは $6^3 = 216$ 通りであり、これらは同様に確か

らしい。 $\frac{19}{50} = \frac{38}{100}$ より、 $5a + 2b - c = 38$ である。 $a \leq 5$ のとき、

$5a + 2b - c \leq 5 \cdot 5 + 2 \cdot 6 - 1 = 36 < 38$ より不適である。よって、 $a=6$ である。このとき、

$5a + 2b - c = 30 + 2b - c$ であり、 $p = \frac{19}{50}$ となるのは、

$$30 + 2b - c = 38 \Leftrightarrow 2b - c = 8$$

となるときである。これを満たす (b, c) の組は、 $(b, c) = (5, 2), (6, 4)$ である。よって求める確率は、

$$\frac{2}{216} = \frac{1}{108}$$

となる。

(3)

(1)より分子の取り得る値の範囲は1から41であるので、 p を既約分数で表したときに分母が4となるのは分子が25となるときである。

[1] $a \leq 2$ のとき

$5a + 2b - c \leq 5 \cdot 2 + 2 \cdot 6 - 1 = 21 < 25$ より不適である。

[2] $a=3$ のとき

$5a + 2b - c = 25 \Leftrightarrow 2b - c = 10$ となるときである。これを満たす (b, c) の組は、
 $(b, c) = (6, 2)$ である。

[3] $a=4$ のとき

$5a + 2b - c = 25 \Leftrightarrow 2b - c = 5$ となるときである。これを満たす (b, c) の組は、
 $(b, c) = (3, 1), (4, 3), (5, 5)$ である。

[4] $a=5$ のとき

$5a + 2b - c = 25 \Leftrightarrow 2b - c = 0$ となるときである。これを満たす (b, c) の組は、
 $(b, c) = (1, 2), (2, 4), (3, 6)$ である。

[5] $a=6$ のとき

$5a + 2b - c \geq 5 \cdot 6 + 2 \cdot 1 - 6 = 26 > 25$ より不適である。

以上[1]から[5]より、求める確率は、

$$\frac{1+3+3}{216} = \frac{7}{216}$$

となる。

(4)

(1)より分子の取り得る値の範囲は1から41であるので、 p を既約分数で表したときに分母が5となるのは分子が20または40となるときである。

[1] 分子が40となるとき

(2)より、 $a \leq 5$ のとき、 $5a + 2b - c \leq 36$ より不適である。 $a=6$ のとき、

$5a + 2b - c = 40 \Leftrightarrow 2b - c = 10$ である。これを満たす (b, c) の組は、 $(b, c) = (6, 2)$ である。

[2] 分子が20となるとき

[i] $a=1$ のとき

$5a + 2b - c = 5 + 2b - c \leq 5 + 2 \cdot 6 - 1 = 16 < 20$ より不適である。

[ii] $a=2$ のとき

$5a + 2b - c = 20 \Leftrightarrow 2b - c = 10$ である。これを満たす (b, c) の組は(3)より1組である。

[iii] $a=3$ のとき

$5a + 2b - c = 20 \Leftrightarrow 2b - c = 5$ である。これを満たす (b, c) の組は(3)より3組である。

[iv] $a=4$ のとき

$5a + 2b - c = 20 \Leftrightarrow 2b - c = 0$ である。これを満たす (b, c) の組は(3)より3組である。

[v] $a \geq 5$ のとき

$5a + 2b - c = 25 + 2b - c \geq 25 + 2 \cdot 1 - 6 = 21 > 20$ より不適である。

以上より求める確率は、

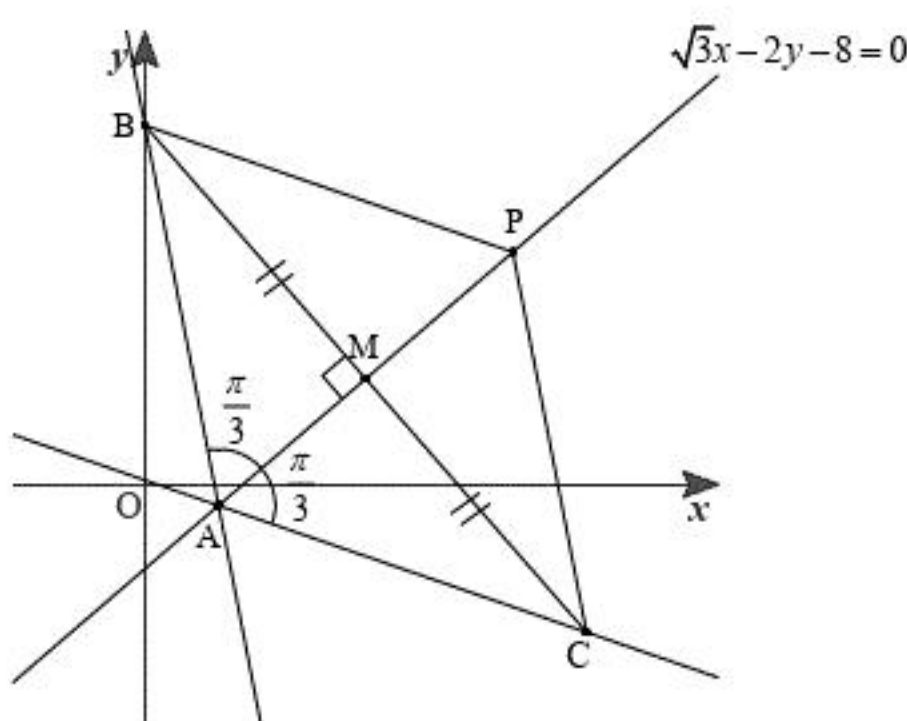
$$\frac{1+1+3+3}{216} = \frac{1}{27}$$

となる。

【解答】

ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ
3	3	1	7	3	5	1
ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ
5	1	2	3	7	1	0
ヘ	ホ	マ	ミ	ム	メ	モ
3	1	1	1	6	8	3

【解説】



直線①の傾きは $\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。直線①が x 軸の正の方向となす角を θ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とすると、

$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。直線①と $\frac{\pi}{3}$ の角をなす直線の傾きは、

$$\begin{aligned}\tan\left(\theta \pm \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\tan \theta \pm \tan \frac{\pi}{3}}{1 \mp \tan \theta \tan \frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{3}}{1 \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}} \\ &= -3\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{5}\end{aligned}$$

である。さらにこれらの直線は点 A を通るのでその方程式は、

$$\begin{aligned}\begin{cases} y - (-1) = -3\sqrt{3}(x - 2\sqrt{3}) \\ y - (-1) = -\frac{\sqrt{3}}{5}(x - 2\sqrt{3}) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3\sqrt{3}x + 17 \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{5}x + \frac{1}{5} \end{cases}\end{aligned}$$

と分かる。C(x, y) とする。直線 BC の傾きは $\frac{y-17}{x}$ である。直線 $BC \perp$ ① より、

$$\begin{aligned}\frac{y-17}{x} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} &= -1 \\ \Leftrightarrow 2x + \sqrt{3}y - 17\sqrt{3} &= 0 \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

である。また、線分 BC の中点 M $\left(\frac{x}{2}, \frac{y+17}{2}\right)$ は①上にあるので、

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \cdot \frac{x}{2} - 2 \cdot \frac{y+17}{2} - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x - y - 25 &= 0 \quad \dots \textcircled{4}\end{aligned}$$

を満たす。③ + $\sqrt{3} \times$ ④ より、

$$\begin{aligned}\left(2 + \frac{3}{2}\right)x - 42\sqrt{3} &= 0 \\ \therefore x &= 12\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。これを④に代入して、

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12\sqrt{3} - 25 = -7$$

となる。よって、C $(12\sqrt{3}, -7)$ である。P(p, q) とすると、線分 AP の中点が M であるから、

$$\begin{aligned}\begin{cases} \frac{2\sqrt{3}+p}{2} = 6\sqrt{3} \\ \frac{-1+q}{2} = 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p = 10\sqrt{3} \\ q = 11 \end{cases}\end{aligned}$$

となり、P $(10\sqrt{3}, 11)$ である。また、

$$\begin{aligned}AP &= \sqrt{(10\sqrt{3} - 2\sqrt{3})^2 + \{11 - (-1)\}^2} \\ &= \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + 12^2} \\ &= 4\sqrt{21} \\ BM &= \sqrt{(6\sqrt{3} - 0)^2 + (5 - 17)^2} \\ &= \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + (-12)^2} \\ &= 6\sqrt{7}\end{aligned}$$

であり、 $AP \perp BM$ より、平行四辺形 ABPC の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{21} \cdot 6\sqrt{7} \cdot 2 = 168\sqrt{3}$$

とわかる。

【解答】

ヤ	ユ	ヨ	ラ	リ	ル	レ	ロ	ワ	ヲ	あ	い	う
1	1	1	0	2	1	1	9	0	1	0	2	5

【解説】

$$a_{n+1} - a_n = 0.00\cdots 011 \quad (\text{小数点以下に } 0 \text{ が } n \text{ 個})$$

$$= 11 \times 10^{-(n+2)}$$

$$= \frac{11}{10^{n+2}}$$

である。したがって、 $a_{n+1} = a_n + \frac{11}{10^{n+2}}$ であり、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \quad (n \geq 2)$$

$$= 0.11 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{11}{10^{k+2}}$$

$$= 0.11 + \frac{\frac{11}{10^3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1} \right\}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{11}{10^2} + \frac{\frac{11}{10^2} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10^n} \right)}{\frac{9}{10}}$$

$$= \frac{11}{10} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{90} - \frac{1}{9 \cdot 10^n} \right)$$

$$= \frac{11}{10} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9 \cdot 10^n} \right)$$

$$= \frac{11}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)$$

となる。また、これは $n=1$ でも成立する。次に、 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{11}{90} \left(1 - \frac{1}{10^k} \right) \\ &= \frac{11}{90} \left\{ n - \frac{\frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)}{1 - \frac{1}{10}} \right\} \\ &= \frac{11}{90} \left\{ n - \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) \right\} \\ &= \frac{11}{90} n - \frac{11}{810} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) \end{aligned}$$

である。この和が 3 を超える最小の n は、

$$\frac{11}{90} n - \frac{11}{810} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) > 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす最小の n である。ここで、 $\frac{1}{10^n}$ は十分小さいと考え、 $\frac{11}{90} n - \frac{11}{810} > 3$ を解くと、

$$n > 3 \cdot \frac{90}{11} + \frac{1}{9} = \frac{2441}{99} = 24.6\cdots$$

となる。 $1 \leq n \leq 24$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{11}{90} n - \frac{11}{810} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) &< \frac{11}{90} n \left(\because 1 - \frac{1}{10^n} > 0 \right) \\ &< \frac{11}{90} \cdot 24 \\ &= \frac{44}{15} \\ &< 3 \end{aligned}$$

より①は成立しない。 $n=25$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{11}{90} \cdot 25 - \frac{11}{810} \left(1 - \frac{1}{10^{25}} \right) &= 3 + \frac{5}{90} - \frac{11}{810} + \frac{11}{810 \cdot 10^{25}} \\ &= 3 + \frac{34}{810} + \frac{11}{810 \cdot 10^{25}} \\ &> 3 \end{aligned}$$

より①が成立する。よって、①を満たす最小の n は $n=25$ と分かる。

【解答】

え	お	か	き	く	け
3	3	9	3	3	3
こ	さ	し	す	せ	
9	2	1	5	4	

【解説】

x の定義域は、 $b-x^2 \geq 0$ 、 $b > 0$ より $-\sqrt{b} \leq x \leq \sqrt{b}$ である。

$$\begin{aligned} f'(x) &= a + \frac{-2x}{2\sqrt{b-x^2}} \\ &= a - \frac{x}{\sqrt{b-x^2}} \end{aligned}$$

である。条件より、 $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{3}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow a - \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{b-\frac{9}{4}}} &= 0 \\ \Leftrightarrow a\sqrt{4b-9} &= 3 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。また、 $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\sqrt{3}$ であるので、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= 2\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}a + \sqrt{b-\frac{9}{4}} &= 2\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \sqrt{4b-9} &= 4\sqrt{3}-3a \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。①に②を代入して、

$$\begin{aligned} a(4\sqrt{3}-3a) &= 3 \\ \Leftrightarrow 3a^2 - 4\sqrt{3}a + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3a - \sqrt{3})(a - \sqrt{3}) &= 0 \\ \therefore a &= \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

となる。このとき①より、 $(a, b) = (\sqrt{3}, 3)$ 、 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 9\right)$ である。以下 (a, b) について場合分けする。

[1] $(a, b) = (\sqrt{3}, 3)$ のとき

x の定義域は、 $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ である。 $f'(x) = \sqrt{3} - \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}$ であり、 $f'(x) = 0$ のとき、

$\sqrt{3} = \frac{x}{\sqrt{3-x^2}} \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot \sqrt{3-x^2} = x$ である。左辺は 0 以上であるので $x \geq 0$ であり、このとき

両辺ともに 0 以上より 2 乗しても同値である。

$$\begin{aligned} 3(3-x^2) &= x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{3}{2} \quad (\because x \geq 0)$$

より $f'(x) = 0$ となる x は $x = \frac{3}{2}$ となり、増減表は次のようになる。

x	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(x)$	$\diagdown$	$+$	0	$-$	$\diagup$
$f(x)$	-3	$\nearrow$	極大	$\searrow$	3

したがって最小値は -3 となり不適である。

[2] $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 9\right)$ のとき

x の定義域は、 $-3 \leq x \leq 3$ である。 $f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$ であり、 $f'(x) = 0$ のとき、

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{9-x^2} = x$ である。左辺は 0 以上であるので $x \geq 0$ であり、このとき

両辺ともに 0 以上より 2 乗しても同値である。

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(9-x^2) &= x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{3}{2} \quad (\because x \geq 0)$$

より $f'(x) = 0$ となる x は $x = \frac{3}{2}$ となり、増減表は次のようになる。

x	-3	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	3
$f'(x)$	$\diagdown$	$+$	0	$-$	$\diagup$
$f(x)$	$-\sqrt{3}$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\sqrt{3}$

したがって $x = \frac{3}{2}$ で極大値 $2\sqrt{3}$ をとり、 $x = -3$ で最小値は $-\sqrt{3}$ となり条件に適する。

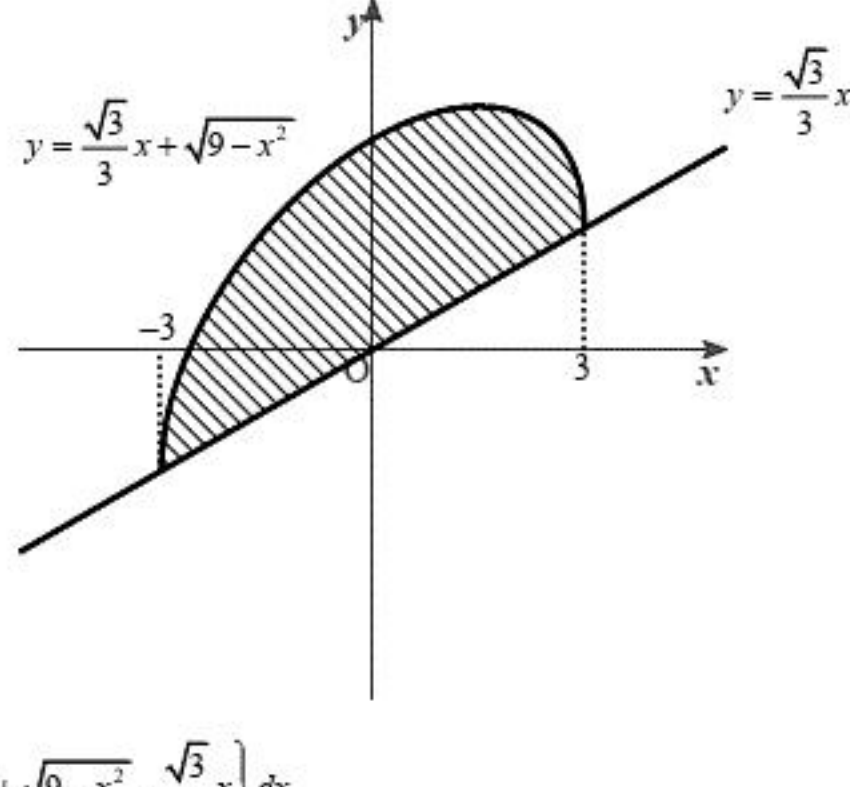
以上 [1], [2] より、 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 、 $b = 9$ 、 $k = -3$ となる。

このとき、 $M(-3, -\sqrt{3})$ 、 $N(3, \sqrt{3})$ となる。2 点 M、N を通る直線の方程式は、

$$y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3} - (-\sqrt{3})}{3 - (-3)}(x - 3)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

である。増減表より、この直線と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積 S_1 は下図の斜線部になる。



$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-3}^3 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{9-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}x \right\} dx \\ &= \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx \end{aligned}$$

となり、 $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$ は半径 3 の円の半分であるから、 $S_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 = \frac{9}{2}\pi$ とわかる。また、 x 軸

より上側の部分の面積について、 $y = f(x)$ と x 軸の交点は、

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{9-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \cdot \sqrt{9-x^2}$$

を満たす。右辺は 0 以下より $x \leq 0$ であり、このとき両辺ともに 0 以下であるので 2 乗しても同値である。

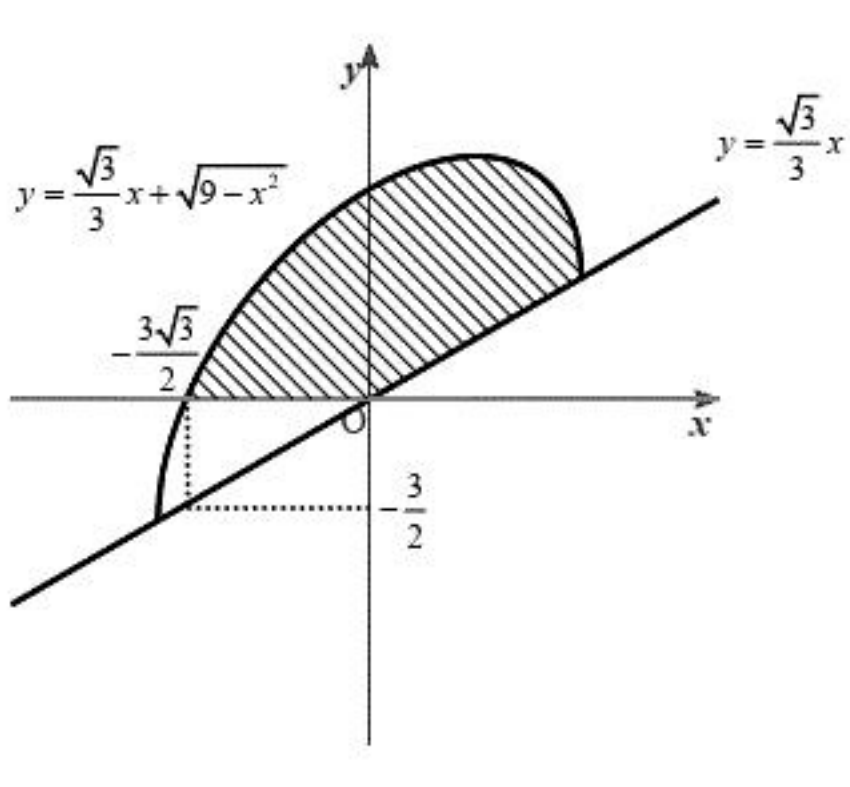
$$x^2 = 3(9-x^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{27}{4}$$

$$\therefore x = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (\because x \leq 0)$$

より、 $x = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ を得る。 $x = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ を $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ に代入すると、 $y = -\frac{3}{2}$ より、 S_1 のうち x 軸より

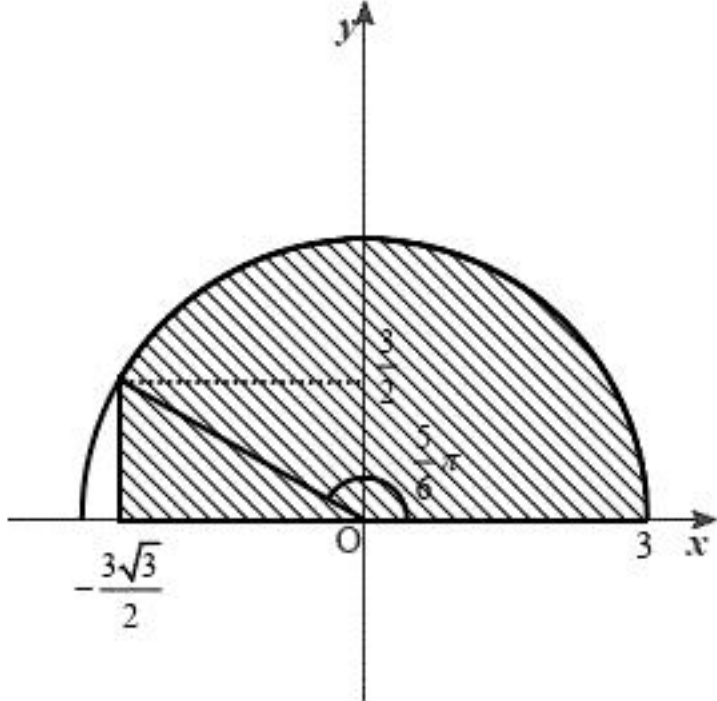
上側の部分は下図の斜線部になる。



よって、求める面積 S_2 は、 S_1 の一部から三角形を引いて、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}^3 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{9-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}x \right\} dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \int_{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}^3 \sqrt{9-x^2} dx - \frac{9\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

となる。ここで $\int_{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}^3 \sqrt{9-x^2} dx$ は下図の扇形と三角形を合わせた部分の面積に等しい。



扇形の中心角を θ ($0 < \theta < \pi$) とすると、 $\cos \theta = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たすので、 $\theta = \frac{5}{6}\pi$ である。

よって、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}^3 \sqrt{9-x^2} dx &= \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{5}{6}\pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{15}{4}\pi + \frac{9\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$S_2 = \frac{15}{4}\pi + \frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{9\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{15}{4}\pi$$

である。