

1

【解答】

|     |              |              |              |              |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|
| (1) | <div>ア</div> | <div>イ</div> |              |              |
|     | 7            | 6            |              |              |
| (2) | <div>ウ</div> | <div>エ</div> | <div>オ</div> | <div>カ</div> |
|     | 7            | 2            | 1            | 6            |
| (3) | <div>キ</div> | <div>ク</div> | <div>ケ</div> |              |
|     | 2            | 2            | 7            |              |
| (4) | <div>コ</div> | <div>サ</div> |              |              |
|     | 7            | 8            |              |              |

【解説】

(1)

$$0 \leq \sin \frac{\pi a}{6} \leq 1$$

$$1 \leq b \leq 6$$

$$-1 \leq \cos \frac{\pi c}{3} \leq 1$$

より、 $T = \sin \frac{\pi a}{6} + b \cos \frac{\pi c}{3}$  が最大となるとき、

$$T = 1 + 6 \cdot 1 = 7 \quad (a = 3, b = 6, c = 6)$$

であり、 $T$  が最小となるとき、

$$T = 0 + 6 \cdot (-1) = -6 \quad (a = 6, b = 6, c = 3)$$

である。

(2)

さいころの目の出方は同様に確からしく、出方は  $6^3 = 216$  通りある。ここで、

$$\sin \frac{\pi a}{6} = \begin{cases} \frac{1}{2} & (a = 1, 5) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & (a = 2, 4) \\ 1 & (a = 3) \\ 0 & (a = 6) \end{cases}$$

$$\cos \frac{\pi c}{3} = \begin{cases} \frac{1}{2} & (c = 1, 5) \\ -\frac{1}{2} & (c = 2, 4) \\ -1 & (c = 3) \\ 1 & (c = 6) \end{cases}$$

と、 $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  より、 $T = 0$  となるのは

$$\sin \frac{\pi a}{6} = \frac{1}{2}, b = 1, \cos \frac{\pi c}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi a}{6} = 1, b = 1, \cos \frac{\pi c}{3} = -1$$

$$\sin \frac{\pi a}{6} = 1, b = 2, \cos \frac{\pi c}{3} = -\frac{1}{2}$$

のときであり、全部で

$$2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 \\ = 7 \text{ 通り}$$

である。よって求める確率は、

$$\frac{7}{216}$$

である。

(3)

$T$  の値が正の偶数になるのは

$$\sin \frac{\pi a}{6} = \frac{1}{2}, b = 3, \cos \frac{\pi c}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi a}{6} = 1, b = 2, 6, \cos \frac{\pi c}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi a}{6} = 1, b = 1, 3, 5, \cos \frac{\pi c}{3} = 1$$

$$\sin \frac{\pi a}{6} = 0, b = 4, \cos \frac{\pi c}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi a}{6} = 0, b = 2, 4, 6, \cos \frac{\pi c}{3} = 1$$

のときであり、全部で

$$2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 1 \\ = 16 \text{ 通り}$$

である。よって求める確率は、

$$\frac{16}{216} = \frac{2}{27}$$

である。

(4)

$T < 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$  の余事象である  $T \geq 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$  となるのは、

$$\sin \frac{\pi a}{6} = \frac{1}{2}, b = 4, 5, 6, \cos \frac{\pi c}{3} = 1$$

$$\sin \frac{\pi a}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = 6, \cos \frac{\pi c}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi a}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = 3, 4, 5, 6, \cos \frac{\pi c}{3} = 1$$

$$\sin \frac{\pi a}{6} = 1, b = 6, \cos \frac{\pi c}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi a}{6} = 1, b = 3, 4, 5, 6, \cos \frac{\pi c}{3} = 1$$

$$\sin \frac{\pi a}{6} = 0, b = 4, 5, 6, \cos \frac{\pi c}{3} = 1$$

のときであり、全部で

$$2 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 \\ = 27 \text{ 通り}$$

である。よって求める確率は、

$$1 - \frac{27}{216} = \frac{7}{8}$$

である。

2

【解答】

|     |   |   |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | シ | ス | セ | ソ | タ |   |   |
|     | 6 | 2 | 2 | 1 | 0 |   |   |
| (2) | チ | ツ | テ | ト | ナ | ニ | ヌ |
|     | 6 | 2 | 1 | 8 | 2 | 1 | 0 |
| (3) | ネ | ノ |   |   |   |   |   |
|     | 1 | 2 |   |   |   |   |   |
| (4) | ハ | ヒ | フ | ヘ | ホ | マ |   |
|     | 2 | 7 | 4 | 2 | 7 | 4 |   |
| (5) | ミ | ム |   |   |   |   |   |
|     | 8 | 9 |   |   |   |   |   |

【解説】

(1)

曲線  $C: y = f(x)$  とすると、

$$f'(x) = 3x^2 - 9$$

である。よって、 $\ell_1$  の方程式は

$$y = f'(1)(x-1) - 8$$

$$\Leftrightarrow y = -6(x-1) - 8$$

$$\therefore y = -6x - 2$$

となる。また、

$$x^3 - 9x = -6x - 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0$$

$$\therefore x = -2, 1$$

であり、P は、 $C$  と  $\ell_1$  の共有点のうち A と異なる点なので、

$$P(-2, 10)$$

となる。

(2)

$$f(x) = -f(-x)$$

であるから、曲線  $C$  は原点对称である。したがって、 $\ell_2$  は  $\ell_1$  と原点对称であり、 $\ell_2$  の方程式は、

$$-y = -6(-x) - 2$$

$$\therefore y = -6x + 2$$

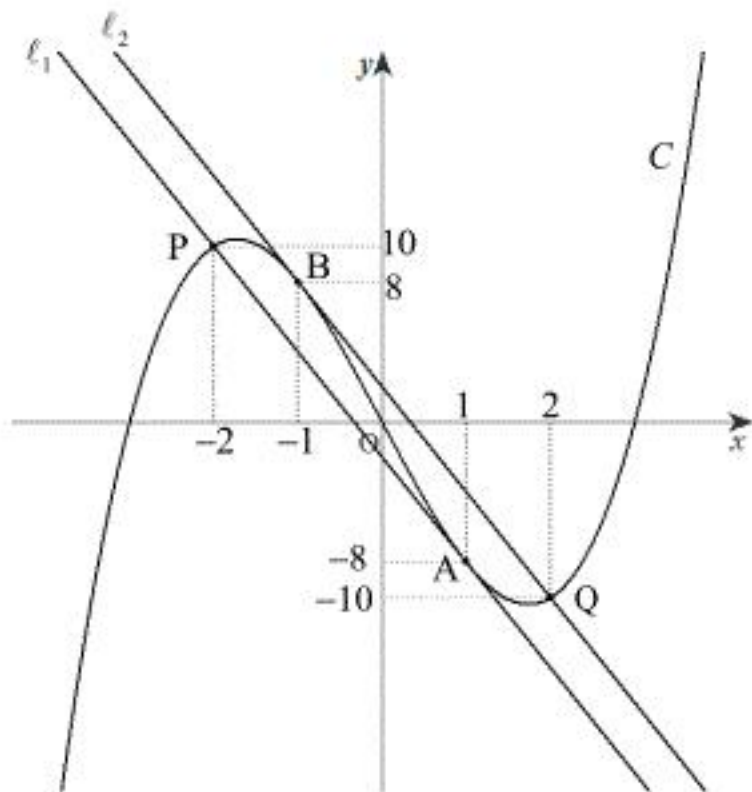
である。また、B は A と、Q は P と原点对称であり、

$$B(-1, 8), Q(2, -10)$$

となる。

(3)

(1), (2) より  $C, \ell_1, \ell_2$  のグラフを図示すると以下の通りである。



上図より、

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 16), \overrightarrow{AP} = (-3, 18)$$

であるので、三角形 ABP の面積は、

$$\frac{1}{2} |-2 \cdot 18 - 16 \cdot (-3)| = 6$$

となる。また、対称性より三角形 BAQ の面積は三角形 ABP の面積に等しく 6 となる。よって、四角形 APBQ の面積は、

$$S_1 = 6 + 6 = 12$$

である。

(4)

$$S_2 = \int_{-2}^1 \{x^3 - 9x - (-6x - 2)\} dx$$

$$= \int_{-2}^1 (x+2)(x-1)^2 dx$$

$$= \int_{-2}^1 \{(x-1)+3\}(x-1)^2 dx$$

$$= \int_{-2}^1 \{(x-1)^3 + 3(x-1)^2\} dx$$

$$= \left[ \frac{1}{4}(x-1)^4 + (x-1)^3 \right]_{-2}^1$$

$$= -\left( \frac{81}{4} - 27 \right)$$

$$= \frac{27}{4}$$

である。また、対称性より、

$$S_3 = S_2 = \frac{27}{4}$$

である。

(5)

(3), (4) より、

$$\frac{S_1}{S_2 + S_3} = \frac{12}{\frac{27}{4} + \frac{27}{4}}$$

$$= \frac{24}{27}$$

$$= \frac{8}{9}$$

である。

〔解答〕

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| メ | モ | ヤ | ユ | ヨ | ラ | リ | ル | レ |
| 4 | 7 | 1 | 6 | 2 | 5 | 4 | 3 | 4 |

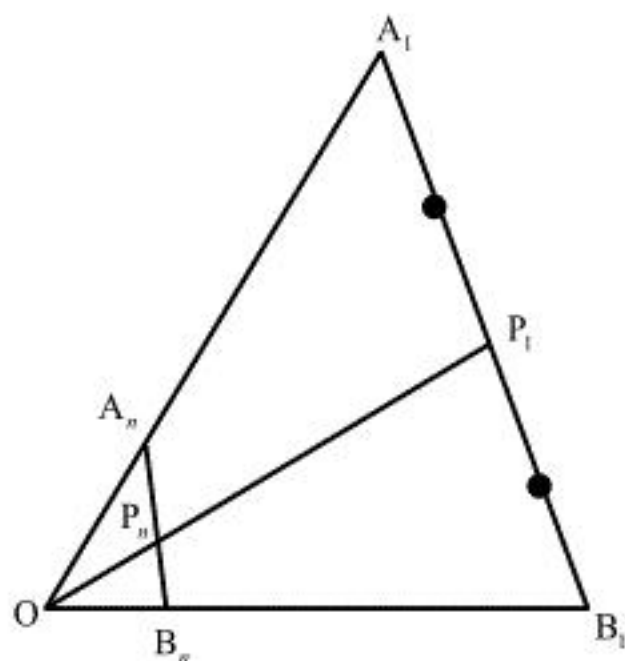
〔解説〕

$$\overrightarrow{OA_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \overrightarrow{OB_1}$$

である。また、点  $P_1$  は辺  $A_1B_1$  の中点であるから、

$$\overrightarrow{OP_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA_1} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OB_1}$$

である。したがって、各点の位置関係は下図のようになる。



上図のように、点  $P_n$  は線分  $OP_1$  上にあることから、実数  $k$  を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_n} &= k \overrightarrow{OP_1} \\ &= k \left( \frac{1}{2} \overrightarrow{OA_1} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OB_1} \right) \end{aligned}$$

と表せる。また、点  $P_n$  は線分  $A_nB_n$  を  $s_n : 1 - s_n$  に内分する点であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_n} &= (1 - s_n) \overrightarrow{OA_n} + s_n \overrightarrow{OB_n} \\ &= (1 - s_n) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \overrightarrow{OA_1} + s_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \overrightarrow{OB_1} \end{aligned}$$

と表せる。 $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1}$  は一次独立なので係数を比較して

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} &= (1 - s_n) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \quad \frac{k}{2} = s_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \therefore (1 - s_n) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} &= s_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow 4^{n-1} (1 - s_n) &= 3^{n-1} s_n \\ \Leftrightarrow s_n &= \frac{4^{n-1}}{3^{n-1} + 4^{n-1}} \end{aligned}$$

となる。よって、 $n=2, 3$  を代入して

$$s_2 = \frac{4}{7}, s_3 = \frac{16}{25}$$

である。



〔解答〕

| □ | 㐍 | 㐓 | あ | い | う | え | お | か | き | く | け | こ | さ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 1 | 4 | 4 | 4 | 1 | 6 | 3 | 2 | 1 | 5 | 3 | 2 | 0 |

〔解説〕

$$x^2 - 2y + a = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x - y + 3 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$bx - y^2 + 4y - c = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

とする。このとき、②より

$$y = x + 3$$

であり、①に代入すると、

$$x^2 - 2(x + 3) + a = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + a - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + a - 7 = 0$$

であり、 $C_1$ と $\ell$ が接するとき、これが重解を持つので、 $a = 7$ となる。また、 $C_1$ と $\ell$ の接点の $x$ 座標が1であることがわかる。よってP(1, 4)である。さらに、③に $y = x + 3$ を代入すると、

$$bx - (x + 3)^2 + 4(x + 3) - c = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (2 - b)x + c - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{2 - b}{2}\right)^2 + c - 3 - \left(\frac{2 - b}{2}\right)^2 = 0$$

となる。 $\ell$ がPで $C_2$ に接するとき、これが $x = 1$ で重解を持つので、

$$\begin{cases} -\frac{2 - b}{2} = 1 \\ c - 3 - \left(\frac{2 - b}{2}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

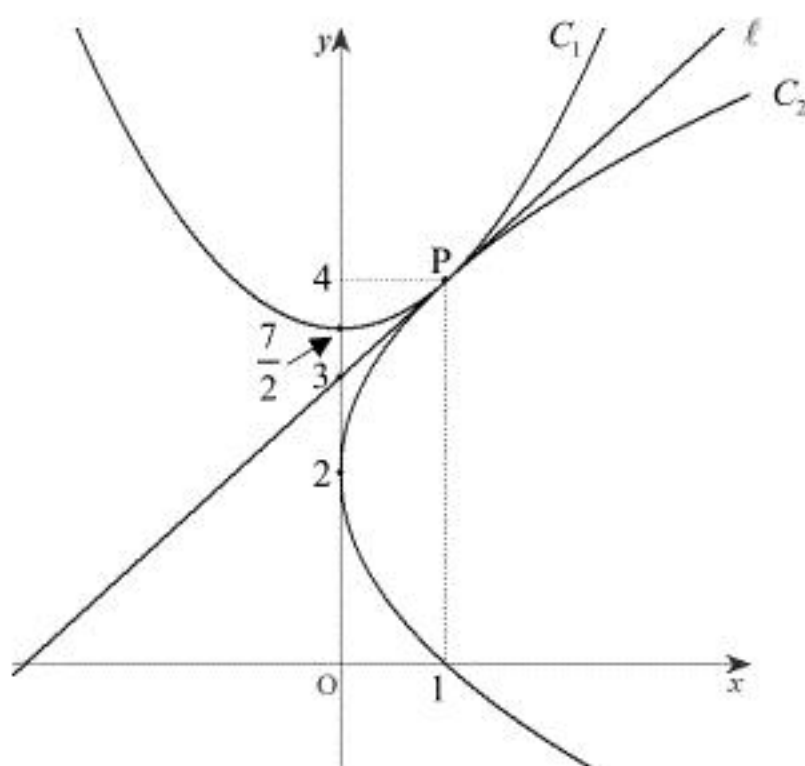
$$\Leftrightarrow b = 4, c = 4$$

である。よって、

$$C_1: x^2 - 2y + 7 = 0$$

$$C_2: 4x - y^2 + 4y - 4 = 0$$

であることから、グラフを図示すると以下の通りである。



上図より、 $C_2$ と $\ell$ および $y$ 軸で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned} & \int_2^4 \frac{1}{4}(y^2 - 4y + 4) dy - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \\ &= \int_2^4 \frac{1}{4}(y - 2)^2 dy - \frac{1}{2} \\ &= \left[ \frac{1}{12}(y - 2)^3 \right]_2^4 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

である。次に $C_1$ と $C_2$ および $y$ 軸で囲まれた部分Dを $x$ 軸の周りに1回転させてできる立体の体積は、 $C_2$ を $y$ について解くと、 $y \geq 2$ において

$$C_2: y = 2\sqrt{x} + 2$$

となることから、

$$\begin{aligned} & \pi \int_0^1 \left( \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2} \right)^2 dx - \pi \int_0^1 (2\sqrt{x} + 2)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 \left( \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{49}{4} - 4x - 8\sqrt{x} - 4 \right) dx \\ &= \pi \int_0^1 \left( \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{2}x^2 - 4x - 8\sqrt{x} + \frac{33}{4} \right) dx \\ &= \pi \left[ \frac{1}{20}x^5 + \frac{7}{6}x^3 - 2x^2 - \frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{33}{4}x \right]_0^1 \\ &= \frac{32}{15}\pi \end{aligned}$$

である。Dを $y$ 軸の周りに1回転させてできる立体の体積は、 $C_1$ を $x$ について解くと、 $x \geq 0$ において

$$C_1: x = \sqrt{2y - 7}$$

となることから、

$$\begin{aligned} & \pi \int_2^4 \left\{ \frac{1}{4}(y - 2)^2 \right\}^2 dy - \pi \int_{\frac{7}{2}}^4 (\sqrt{2y - 7})^2 dy \\ &= \pi \int_2^4 \frac{1}{16}(y - 2)^4 dy - \pi \int_{\frac{7}{2}}^4 (2y - 7) dy \\ &= \pi \left[ \frac{1}{80}(y - 2)^5 \right]_2^4 - \pi \left[ y^2 - 7y \right]_{\frac{7}{2}}^4 \\ &= \frac{2}{5}\pi - \frac{1}{4}\pi \\ &= \frac{3}{20}\pi \end{aligned}$$

である。