

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ
	5	1	4	4
(2)	オ	カ	キ	
	1	2	7	
(3)	ク	ケ	コ	サ
	2	5	2	7
(4)	シ	ス	セ	ソ
	1	1	4	8

【解説】

(1)

さいころを投げてどの目が出るかと硬貨を投げてどちらの面が出るかは独立して決まるため、3個のさいころと1枚の硬貨を投げるとき、目および面の出方は、

$$2 \cdot 6^3 = 2^4 \cdot 3^3 \text{ (通り)}$$

存在し、これらは同様に確からしい。以下、硬貨の出た面により場合分けをする。

[1] 硬貨の表が出たとき

$p=7$ になる a, b, c の組み合わせは、

$$\{a, b, c\} = \{1, 1, 5\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 3\}, \{2, 2, 3\}$$

であり、さいころと数字の組み合わせを考慮すると、場合の数は、

$${}_3C_1 \cdot 3 + 3! = 15 \text{ (通り)}$$

である。

[2] 硬貨の裏が出たとき

$1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 6, 1 \leq c \leq 6$ より、 $p=7$ になる a, b, c の組み合わせは存在しない。

以上、[1], [2]より、求める確率は、

$$\frac{15+0}{2^4 \cdot 3^3} = \frac{5}{144}$$

である。

(2)

硬貨の出た面により場合分けをする。

[1] 硬貨の表が出たとき

$p=15$ になる a, b, c の組み合わせは、

$$\{a, b, c\} = \{3, 6, 6\}, \{4, 5, 6\}, \{5, 5, 5\}$$

であり、さいころと数字の組み合わせを考慮すると、場合の数は、

$${}_3C_1 + 3! + {}_3C_3 = 10 \text{ (通り)}$$

である。

[2] 硬貨の裏が出たとき

$p=15$ になる a, b, c の組み合わせは、

$$\{a, b, c\} = \{1, 3, 5\}$$

のみであり、さいころと数字の組み合わせを考慮すると、場合の数は、

$$3! = 6 \text{ (通り)}$$

である。

以上、[1], [2]より、求める確率は

$$\frac{10+6}{2^4 \cdot 3^3} = \frac{1}{27}$$

である。

(3)

$p < 90$ になる場合の余事象である、 $p \geq 90$ になる場合について、硬貨の出た面により場合分けをする。

[1] 硬貨の表が出たとき

$1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 6, 1 \leq c \leq 6$ より、 $3 \leq a+b+c \leq 18$ であるため、 $p \geq 90$ になる a, b, c の組み合わせは存在しない。

[2] 硬貨の裏が出たとき

$p \geq 90$ になる a, b, c の組み合わせは、

$$\{a, b, c\} = \{3, 5, 6\}, \{3, 6, 6\}, \{4, 4, 6\}, \{4, 5, 5\}, \{4, 5, 6\}, \\ \{4, 6, 6\}, \{5, 5, 5\}, \{5, 5, 6\}, \{5, 6, 6\}, \{6, 6, 6\}$$

であり、さいころと数字の組み合わせを考慮すると、場合の数は、

$$3! \cdot 2 + {}_3C_1 \cdot 6 + {}_3C_3 \cdot 2 = 32 \text{ (通り)}$$

である。

以上、[1], [2]より、余事象の確率は、

$$\frac{0+32}{2^4 \cdot 3^3} = \frac{2}{27}$$

であるため、求める確率は

$$1 - \frac{2}{27} = \frac{25}{27}$$

である。

(4)

硬貨の出た面により場合分けをする。

[1] 硬貨の表が出たとき

p の値が10の倍数になる a, b, c の組み合わせは、

$$\{a, b, c\} = \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 2, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 4\}, \{3, 3, 4\}$$

であり、さいころと数字の組み合わせを考慮すると、場合の数は、

$$3! \cdot 3 + {}_3C_1 \cdot 3 = 27 \text{ (通り)}$$

である。

[2] 硬貨の裏が出たとき

p の値が10の倍数になるのは2, 4, 6のうちのいずれかの目と5の目が少なくとも1回ずつ出たときである。以下、5の目が出た回数で場合分けをして考える。

[i] 5の目が1回出たとき

他の2つのさいころの目の出方は 5^2 通りあり、そのうち p が奇数となるのは2つとも1または3の目が出た 2^2 通りであるため、 p が10の倍数になるのは、

$${}_3C_1 \cdot (5^2 - 2^2) = 63 \text{ (通り)}$$

である。

[ii] 5の目が2回出たとき

p が10の倍数になるのは残りの目が2, 4, 6のいずれかのときであるため、

$${}_3C_1 \cdot 3 = 9 \text{ (通り)}$$

である。

以上、[i], [ii]より、場合の数は $63+9=72$ (通り)である。

以上、[1], [2]より、求める確率は

$$\frac{27+72}{2^4 \cdot 3^3} = \frac{11}{48}$$

である。

【解答】

(1)	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ				
	0	8	1	1	3	9				
(2)	ニ	ヌ								
	2	3								
(3)	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	
	1	3	8	3	2	4	6	4	3	
(4)	ム									
	2									

【解説】

(1)

①と②が接するとき、①と②を連立して y を消去することで得られる x についての二次方程式

$$\begin{aligned} x^2 &= -x^2 + 2(t-2)x - t^2 + 6t - 2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2(t-2)x + t^2 - 6t + 2 &= 0 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{4}$$

は重解をもつ。すなわち、④の判別式を D とすると、 $D=0$ となる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (t-2)^2 - 2 \cdot (t^2 - 6t + 2) \\ &= 8t - t^2 \\ &= -t(t-8) \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow -t(t-8) &= 0 \\ \therefore t &= 0, 8 \end{aligned}$$

である。よって、①と②が接するとき、 $t=0$ または $t=8$ である。このとき、④の重解は

$x = \frac{t-2}{2}$ であるため、①と②の接点の座標は $\left(\frac{t-2}{2}, \left(\frac{t-2}{2}\right)^2\right)$ である。したがって、 $t=0$ のとき、①と②の接点は $A(-1, 1)$ であり、 $t=8$ のとき、①と②の接点は $B(3, 9)$ である。

(2)

(1)より、2点 A, B を通る直線の方程式は、

$$\begin{aligned} y-1 &= \frac{9-1}{3-(-1)} \{x-(-1)\} \\ \Leftrightarrow y &= 2x+3 \end{aligned}$$

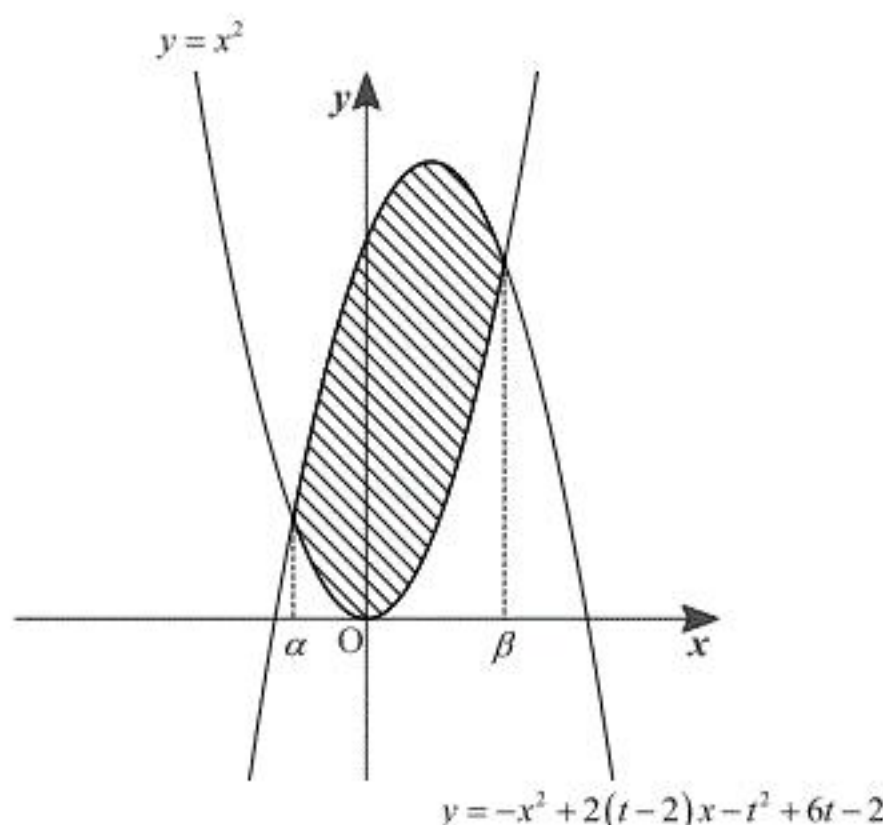
である。

(3)

$0 < t < 8$ のとき $D > 0$ であるため、④は異なる2つの実数解をもつ。それらを α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \frac{\sqrt{D}}{2} \\ &= \sqrt{8t - t^2} \end{aligned}$$

である。また、①と②で囲まれた部分は下図の斜線部分のようになる。



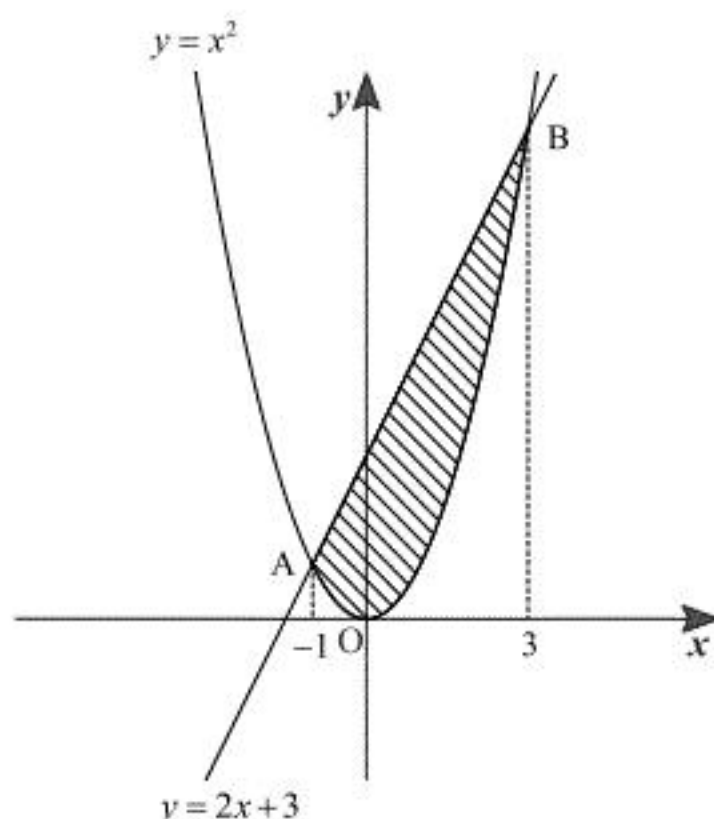
以上より、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{-x^2 + 2(t-2)x - t^2 + 6t - 2 - x^2\} dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{3} (8t - t^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \{-(t-4)^2 + 16\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

である。 $0 < t < 8$ であるため、 S は $t=4$ のとき、最大値 $\frac{1}{3} \cdot 16^{\frac{3}{2}} = \frac{64}{3}$ をとる。

(4)

(3)より、 $S_1 = \frac{64}{3}$ である。また、①と③で囲まれた部分は下図の斜線部分のようになる。



したがって、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-1}^3 (2x+3-x^2) dx \\ &= -\int_{-1}^3 (x+1)(x-3) dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot \{3-(-1)\}^3 \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

であるため、求める値は、

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{64}{3}}{\frac{32}{3}} = 2$$

である。

【解答】

(1)	メ	モ	ヤ	ユ
	9	4	9	8
(2)	ヨ			
	6			
(3)	ラ	リ	ル	
	2	4	5	
(3)	レ	ロ	ワ	ヲ
	1	0	1	8
(4)	あ	い	う	
	4	4	5	

【解説】

(1)

第 m 群には $2^m - 1$ 個の項が含まれるため、 $m \geq 2$ のとき、第 m 群の初項は、

$$1 + \sum_{k=1}^{m-1} (2^k - 1) = 1 + 2 \cdot \frac{2^{m-1} - 1}{2 - 1} - (m - 1) = 2^m - m$$

より、第 $2^m - m$ 項と表され、これは $m = 1$ のときも成り立つ。よって、第 1000 項が第 p_1 群に含まれるとすると、

$$2^{p_1} - p_1 \leq 1000 < 2^{p_1+1} - (p_1 + 1)$$

を満たす。よって、 $2^9 - 9 = 503$, $2^{10} - 10 = 1014$ より、 $p_1 = 9$ である、すなわち、第 1000 項は第 9 群に含まれる。また、

$$1000 - 503 + 1 = 498$$

より、第 1000 項は第 9 群の第 498 項目である。

(2)

第 200 項が第 p_2 群に含まれるとすると、

$$2^{p_2} - p_2 \leq 200 < 2^{p_2+1} - (p_2 + 1)$$

を満たす。よって、 $2^7 - 7 = 121$, $2^8 - 8 = 248$ より、 $p_2 = 7$ である。すなわち、第 200 項は第 7 群に含まれる。また、

$$200 - 121 + 1 = 80$$

より、第 200 項は第 7 群の第 80 項目であるため、その値は、

$$\frac{80}{2^7} = \frac{5}{8} > \frac{1}{4}$$

である。ここで、第 1 群において値が $\frac{1}{4}$ に等しい項は存在しない。また、 $m \geq 2$ のとき、第 m

群において、第 2^{m-2} 項目は $\frac{2^{m-2}}{2^m}$ であるため、 $\frac{1}{4}$ と等しく、第 2^{m-2} 項目以外の項は $\frac{1}{4}$ と等しく

ない。したがって、初項から第 200 項までに、値が $\frac{1}{4}$ に等しい項は全部で、

$$7 - 1 = 6 \text{ (個)}$$

ある。

(3)

第 500 項が第 p_3 群に含まれるとすると、

$$2^{p_3} - p_3 \leq 500 < 2^{p_3+1} - (p_3 + 1)$$

を満たす。よって、 $2^8 - 8 = 248$, $2^9 - 9 = 503$ より、 $p_3 = 8$ である。すなわち、第 500 項は第 8 群に含まれる。また、

$$500 - 248 + 1 = 253$$

より、第 500 項は第 8 群の第 253 項目であるため、その値は、

$$\frac{253}{2^8} = \frac{253}{256} > \frac{1}{2}$$

である。ここで、第 m 群には値が $\frac{1}{2}$ 以下の項が $\frac{1}{2^m}, \frac{2}{2^m}, \frac{3}{2^m}, \dots, \frac{2^{m-1}}{2^m}$ の 2^{m-1} 個あるため、初項

から第 500 項までに、値が $\frac{1}{2}$ 以下の項が、

$$\sum_{k=1}^8 2^{k-1} = \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 255 \text{ (個)}$$

ある。したがって、初項から第 500 項までに、値が $\frac{1}{2}$ より大きい項は全部で、

$$500 - 255 = 245 \text{ (個)}$$

ある。

(4)

第 2036 項が第 p_4 群に含まれるとき、

$$2^{p_4} - p_4 \leq 2036 < 2^{p_4+1} - (p_4 + 1)$$

を満たす。よって、 $2^{10} - 10 = 1014$, $2^{11} - 11 = 2037$ より、 $p_4 = 10$ である。すなわち、第 2036 項は第 10 群の末項である。ここで、第 m 群に含まれるすべての項の和は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^m-1} \frac{k}{2^m} &= \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2^m - 1) \cdot \{(2^m - 1) + 1\} \\ &= 2^{m-1} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるため、初項から第 $2^{m+1} - m$ 項、すなわち、第 m 群の末項までの和は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \left(2^{k-1} - \frac{1}{2} \right) &= \frac{2^m - 1}{2 - 1} - \frac{1}{2} \cdot m \\ &= 2^m - \frac{1}{2}m - 1 \end{aligned}$$

となる。したがって、初項から第 2036 項までの和は、

$$2^{10} - \frac{1}{2} \cdot 10 - 1 = 1018$$

である。

(5)

(4)より、初項から第 7 群の末項までの和は、

$$2^7 - \frac{1}{2} \cdot 7 - 1 = \frac{247}{2} < 200$$

であり、初項から第 8 群の末項までの和は、

$$2^8 - \frac{1}{2} \cdot 8 - 1 = 251 > 200$$

であるため、求める第 n 項は第 8 群に含まれる。ここで、 $2^8 - 8 = 248$, $2^9 - 9 = 503$ より、第 8 群の初項は第 248 項、末項は第 502 項である。よって、 $246 \leq n \leq 502$ であり、このとき、第 248 項から第 n 項目までの和は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-247} \frac{k}{2^8} &= \frac{1}{2^8} \cdot \frac{1}{2} \cdot (n - 247) \cdot \{(n - 247) + 1\} \\ &= \frac{1}{2^9} (n - 247)(n - 246) \end{aligned}$$

となるため、初項から第 n 項までの和は $\frac{247}{2} + \frac{1}{2^9} (n - 247)(n - 246)$ である。よって、初項から

第 n 項までの和が 200 を超える自然数 n は、

$$\begin{aligned} \frac{247}{2} + \frac{1}{2^9} (n - 247)(n - 246) &> 200 \\ \Leftrightarrow (n - 247)(n - 246) &> 39168 \end{aligned}$$

を満たす。よって、 $197 \cdot 198 = 39006$, $198 \cdot 199 = 39402$ より、求める最小の n の値は、

$$\begin{aligned} n - 247 &= 198 \\ \therefore n &= 445 \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

え	お	か	き	く	け	こ	さ	し	す
3	1	3	0	6	1	3	2	9	3

〔解説〕

真数条件より、 $3t > 0$ 、すなわち、 $t > 0$ である。また、

$$(\log_e 3x)' = \frac{1}{x}$$

であるため、点PにおけるCの接線の方程式は t を用いて、

$$y - \log_e 3t = \frac{1}{t}(x - t)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{t}x - 1 + \log_e 3t \quad \dots \textcircled{1}$$

と表される。この直線が点 $(2t, 2)$ を通るとき、

$$2 = \frac{1}{t} \cdot 2t - 1 + \log_e 3t$$

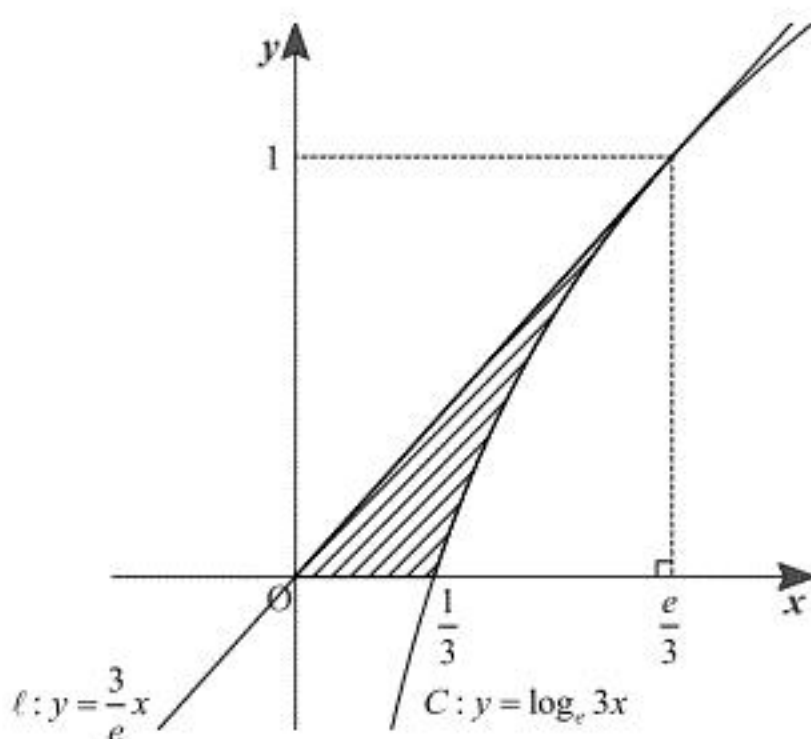
$$\Leftrightarrow \log_e 3t = 1$$

$$\therefore t = \frac{e}{3}$$

が成り立つため、 $P\left(\frac{e}{3}, 1\right)$ である。このとき、直線①と接線 $\ell: y = ax + b$ は一致するため、

$$\begin{aligned} (a, b) &= \left(\frac{1}{\frac{e}{3}}, -1 + \log_e \left(3 \cdot \frac{e}{3} \right) \right) \\ &= \left(\frac{3}{e}, 0 \right) \end{aligned}$$

となる。以上より、Cおよび ℓ は下図のようになる。また、Dは下図の斜線部分である。



ここで、部分積分法より、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} \log_e 3x dx &= \left[x \log_e 3x \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} dx \\ &= \frac{e}{3} - \left[x \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} \\ &= \frac{e}{3} - \left(\frac{e}{3} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} (\log_e 3x)^2 dx &= \left[x (\log_e 3x)^2 \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} - 2 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} \log_e 3x dx \\ &= \frac{e}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{e-2}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって、Dの面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{e}{3} \cdot 1 - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} \log_e 3x dx = \frac{e}{6} - \frac{1}{3}$$

であり、Dを x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot 1^2) \cdot \frac{e}{3} - \pi \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} (\log_e 3x)^2 dx &= \frac{e}{9} \pi - \pi \cdot \frac{e-2}{3} \\ &= \frac{2}{9} \pi (3-e) \end{aligned}$$

である。