

【解答】

(1)	ア	イ	ウ			
	5	1	8			
(2)	エ	オ	カ	キ	ク	
	1	4	5	1	1	
(3)	ケ	コ	サ			
	1	2	7			
(4)	シ	ス				
	7	8				

【解説】

(1)

5^c は正の数であるから、求める確率は $3^a - 2^b$ が負になる確率と等しい。ここで自然数 n に対し、

n	1	2	3	4	5	6
2^n	2	4	8	16	32	64
3^n	3	9	27	81	243	729

となるから、条件を満たす (a, b) の組合せは、

$$(a, b) = (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 5), (3, 6)$$

の10通りである。全事象は $6 \cdot 6 = 36$ (通り) であるから、求める確率は、

$$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

となる。

(2)

p の値が整数になるのは、 $3^a - 2^b$ が素因数に5を持つときである。まず、これを満たす (a, b) の中で、 $3^a - 2^b$ を最大にするものを求める。 a が大きいほど $3^a - 2^b$ は大きくなるから、 $a = 6$ のときを考えると、

$$3^6 - 2^b = 729 - 2^b$$

であり、 b が小さいほど $3^a - 2^b$ は大きくなるから、小さい順に b を代入していくと、 $b = 2$ のときに初めて $3^a - 2^b$ が素因数に5を持ち、その値は、

$$729 - 2^2 = 725$$

である。次に、 $a \leq 5$ のときを考えると、

$$\begin{aligned} 3^a - 2^b &\leq 3^5 - 2^b \\ &= 243 - 2^b \\ &< 243 \\ &< 725 \end{aligned}$$

であるから、 $(a, b) = (6, 2)$ のとき、 $3^a - 2^b$ は $3^a - 2^b$ が素因数に5を持つときの最大値725を

とる。そして、 $c = 1$ のときに $\frac{725}{5^c}$ が最大値をとるから、その値は、

$$\begin{aligned} p &= \frac{725}{5^1} \\ &= 145 \end{aligned}$$

である。また同様に、 $3^a - 2^b$ が素因数に5を持つような (a, b) の中で、 $3^a - 2^b$ を最小にするものを求める。 b が大きいほど $3^a - 2^b$ は小さくなるから、 $b = 6$ のときを考えると、

$$3^a - 2^6 = 3^a - 64$$

であり、 a が小さいほど $3^a - 2^b$ は小さくなるから、小さい順に a を代入していくと、 $a = 2$ のときに初めて $3^a - 2^b$ が素因数に5を持ち、その値は、

$$3^2 - 64 = -55$$

である。次に、 $b \leq 5$ のときを考えると、

$$\begin{aligned} 3^a - 2^b &\geq 3^a - 2^5 \\ &= 3^a - 32 \\ &> -32 \\ &> -55 \end{aligned}$$

であるから、 $(a, b) = (2, 6)$ のとき、 $3^a - 2^b$ は $3^a - 2^b$ が素因数に5を持つときの最小値-55を

とる。そして、 $c = 1$ のときに $\frac{-55}{5^c}$ が最小値をとるから、その値は、

$$\begin{aligned} p &= \frac{-55}{5^1} \\ &= -11 \end{aligned}$$

である。

(3)

(1)の $2^n, 3^n$ の表をもとに、 $3^a - 2^b$ が5の累乗の倍数で正の値になるときを場合分けして考える。

[1] $3^a - 2^b$ が5の倍数で正の値になるとき

(1)の表より、その題意を満たす (a, b) の組合せは、

$$(a, b) = (2, 2), (3, 1), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (6, 6)$$

の6通りである。よって上記の6通りに対し $c = 1$ となれば p は正の整数となる。

[2] $3^a - 2^b$ が25の倍数で正の値になるとき

(1)の表より、その題意を満たす (a, b) の組合せは、

$$(a, b) = (3, 1), (6, 2)$$

の2通りである。よって上記の2通りに対し $c = 2$ となれば p は正の整数となる。

[3] $3^a - 2^b$ が125の倍数で正の値になるとき

(1)の表よりその題意を満たす (a, b) の組合せはない。またこれ以降5の指数の値を大きくしても、題意を満たす (a, b) の組合せは存在しない。

[1], [2], [3]より、 p の値が正の整数になる (a, b, c) の組合せは、

$$6 + 2 = 8 \text{ (通り)}$$

である。また全事象は $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ (通り) であるから、求める確率は、

$$\frac{8}{216} = \frac{1}{27}$$

となる。

(4)

題意の余事象、つまり $p \geq 9$ を満たすときを、 c の値について場合分けして考える。

[1] $c = 1$ のとき

$p \geq 9$ を変形すると、

$$p \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^a - 2^b}{5} \geq 9$$

$$\Leftrightarrow 3^a - 2^b \geq 45 \qquad \cdots \text{①}$$

となるから、①を満たす (a, b) の組合せを考える。それは(1)の表より、

$$\begin{aligned} (a, b) &= (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5) \\ &\quad (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6) \\ &\quad (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{aligned}$$

の17通りが該当する。これらに対し $c = 1$ となれば $p \geq 9$ を満たす。

[2] $c = 2$ のとき

$p \geq 9$ を変形すると、

$$p \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^a - 2^b}{25} \geq 9$$

$$\Leftrightarrow 3^a - 2^b \geq 225 \qquad \cdots \text{②}$$

となるから、②を満たす (a, b) の組合せを考える。それは(1)の表より、

$$\begin{aligned} (a, b) &= (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4) \\ &\quad (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{aligned}$$

の10通りが該当する。これらに対し $c = 2$ となれば $p \geq 9$ を満たす。

[3] $c = 3$ のとき

$p \geq 9$ を変形すると、

$$p \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^a - 2^b}{125} \geq 9$$

$$\Leftrightarrow 3^a - 2^b \geq 1125 \qquad \cdots \text{③}$$

となるから、③を満たす (a, b) の組合せを考えるが、それは $3^a - 2^b$ の中で最大となる $(a, b) = (6, 1)$ のときですら $3^6 - 2^1 = 727$ となるため、③を満たす (a, b) の組合せは存在しない。またこれ以降 c の値を大きくしても題意を満たす (a, b) の組合せは存在しない。

[1], [2], [3]より、 $p \geq 9$ を満たす (a, b, c) の組合せは、

$$17 + 10 = 27 \text{ (通り)}$$

である。よって $p < 9$ となる確率は、

$$\begin{aligned} \frac{216 - 27}{216} &= \frac{189}{216} \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

となる。

【解答】

セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ
8	2	4	2	2	7	4	1	0	8	2	3	5
ヒ	フ	ヘ	ホ									
0	2	1	2									

【解説】

$f(x) = -x^3 + 6x^2 + ax + b$ とおくと、 $f'(x) = -3x^2 + 12x + a$ であるから、点 $P(1, -1)$ における①の接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y + 1 &= f'(1)(x - 1) \\ \Leftrightarrow y &= (a + 9)(x - 1) - 1 \\ \Leftrightarrow (a + 9)x - y - a - 10 &= 0 \end{aligned}$$

となる。この式と問題文の②の式 $x - y - 2 = 0$ は恒等式であるから、係数を比較して、

$$\begin{aligned} a + 9 &= 1 \\ \therefore a &= -8 \end{aligned}$$

が得られ、このとき、

$$\begin{aligned} (a + 9)x - y - a - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow (-8 + 9)x - y - (-8) - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow x - y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

となり、実際に恒等式が成り立つ。よって $a = -8$ と点 $P(1, -1)$ の値を①に代入すると、

$$\begin{aligned} -1 &= -1 + 6 - 8 + b \\ \therefore b &= 2 \end{aligned}$$

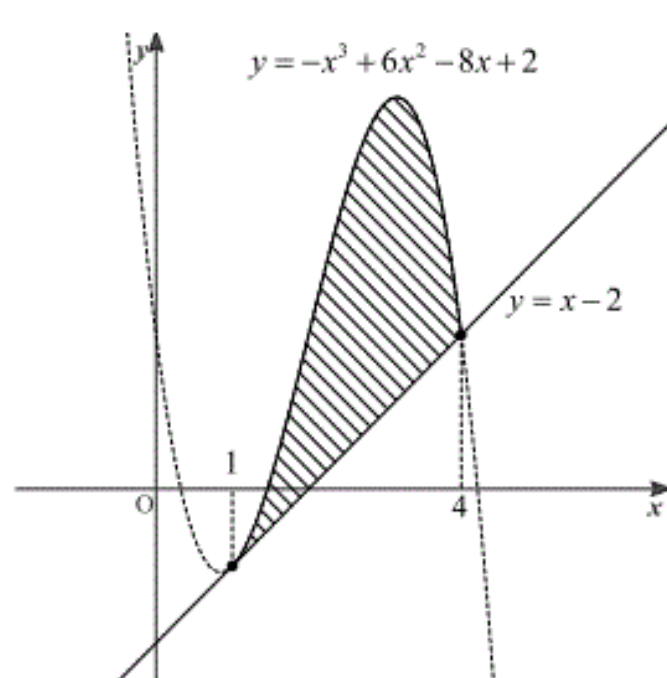
が得られる。次に①と②の点 P 以外の共有点を求めると、

$$\begin{aligned} x - 2 &= -x^3 + 6x^2 - 8x + 2 \\ \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)^2(x - 4) &= 0 \\ \therefore x &= 1, 4 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} y &= 4 - 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となり、点 $Q(4, 2)$ と求められる。よって、①と②で囲まれた部分は以下の図の斜線部である。



図より、①と②で囲まれた部分の面積は、

$$\begin{aligned} &\int_1^4 \{(-x^3 + 6x^2 - 8x + 2) - (x - 2)\} dx \\ &= -\int_1^4 (x - 1)^2(x - 4) dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}(x - 1)^3(x - 4)\right]_1^4 + \frac{1}{3}\int_1^4 (x - 1)^3 dx \\ &= \frac{1}{12}[(x - 1)^4]_1^4 \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

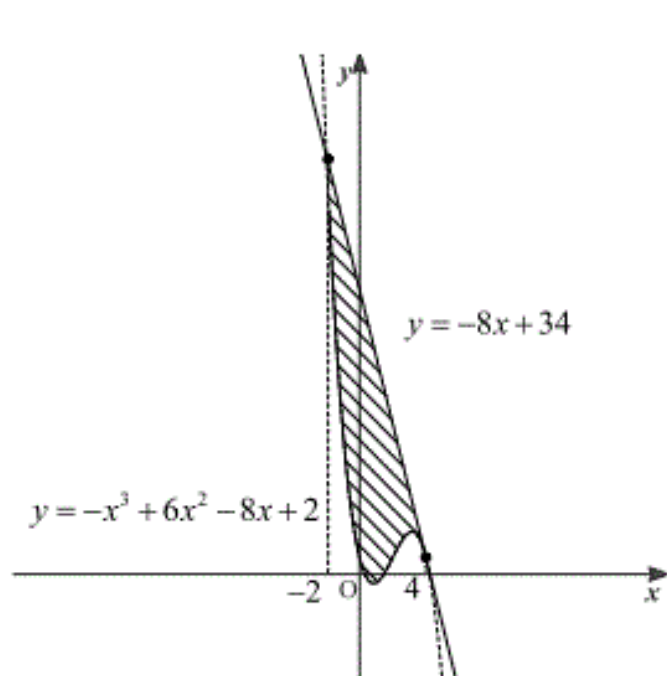
となる。次に①の点 Q における接線を考えると、その方程式は、

$$\begin{aligned} y - 2 &= f'(4)(x - 4) \\ \Leftrightarrow y &= -8(x - 4) + 2 \\ \Leftrightarrow y &= -8x + 34 \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

であり、この④と①の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} -8x + 34 &= -x^3 + 6x^2 - 8x + 2 \\ \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 32 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 4)^2(x + 2) &= 0 \\ \therefore x &= -2, 4 \end{aligned}$$

であるから、①の点 Q における接線と①で囲まれた部分は以下の図の斜線部である。



図より、①の点 Q における接線と①で囲まれた部分の面積は、

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^4 \{(-8x + 34) - (-x^3 + 6x^2 - 8x + 2)\} dx \\ &= \int_{-2}^4 (x - 4)^2(x + 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - 4)^3(x + 2)\right]_{-2}^4 - \frac{1}{3}\int_{-2}^4 (x - 4)^3 dx \\ &= -\frac{1}{12}[(x - 4)^4]_{-2}^4 \\ &= 108 \end{aligned}$$

となる。次に②に平行で①に接する直線を考える。その接点 R の x 座標を t とおくと、②の傾きは 1 であるから、

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 \\ \Leftrightarrow -3t^2 + 12t - 8 &= 1 \\ \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(t - 1)(t - 3) &= 0 \\ \therefore t &= 3 \quad (\because t \neq 1) \end{aligned}$$

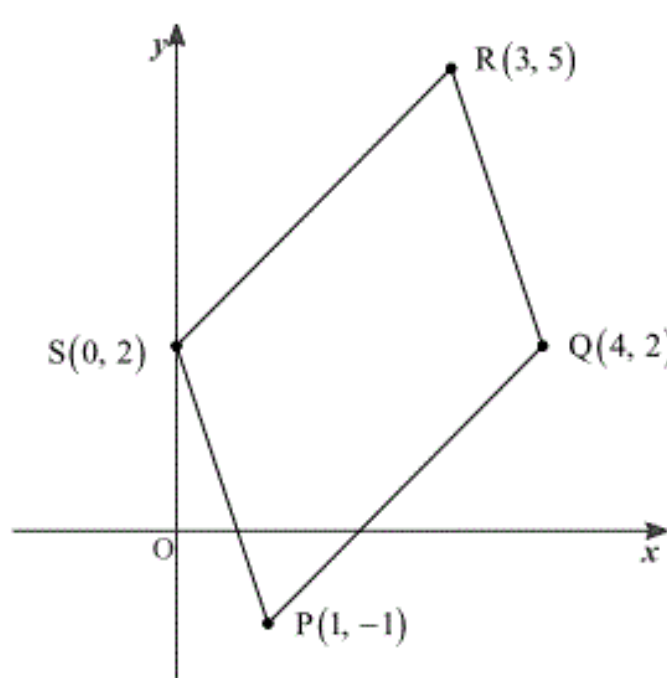
となる。よって接点 R は $R(3, 5)$ であり、接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y - 5 &= x - 3 \\ \Leftrightarrow x - y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

となる。③と①の共有点は、

$$\begin{aligned} x + 2 &= -x^3 + 6x^2 - 8x + 2 \\ \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x - 3)^2 &= 0 \\ \therefore x &= 0, 3 \end{aligned}$$

より、 $R(3, 5)$ 、 $S(0, 2)$ とわかる。ここで、四角形 $PQRS$ を図示すると以下の通りである。



図より、四角形 $PQRS$ を SQ を底辺とする 2 つの三角形、 $\triangle SQR$ と $\triangle SQP$ の和と捉えると、その面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 12$$

となる。

〔解答〕

(1)	$\overline{\text{マ}}$	$\overline{\text{ミ}}$				
	4	6				
(2)	$\overline{\text{ム}}$	$\overline{\text{メ}}$	$\overline{\text{モ}}$	$\overline{\text{ヤ}}$	$\overline{\text{ユ}}$	$\overline{\text{ヨ}}$
	8	3	4	3	4	3
(3)	$\overline{\text{ウ}}$	$\overline{\text{リ}}$				
	6	3				
(4)	$\overline{\text{ル}}$	$\overline{\text{レ}}$	$\overline{\text{ロ}}$			
	1	5	2			

〔解説〕

(1)

$$\overline{\text{AB}} = (-2, 1, 0), \overline{\text{AC}} = (-2, 0, 2), \overline{\text{BC}} = (0, -1, 2)$$

$$\overline{\text{DA}} = (2, 0, 0), \overline{\text{DB}} = (0, 1, 0), \overline{\text{DC}} = (0, 0, 2)$$

である。ここで、実数 s, t を用いて、

$$\overline{\text{DH}} = s\overline{\text{DA}} + t\overline{\text{DB}} + (1-s-t)\overline{\text{DC}}$$

とおくと、

$$\overline{\text{DH}} = (2s, t, 2-2s-2t)$$

である。 $\overline{\text{DH}} \perp \alpha$ より、

$$\overline{\text{DH}} \perp \overline{\text{AB}}, \overline{\text{DH}} \perp \overline{\text{AC}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\text{DH}} \cdot \overline{\text{AB}} = 0 \\ \overline{\text{DH}} \cdot \overline{\text{AC}} = 0 \end{cases} \left(\because \overline{\text{DH}} \neq \vec{0} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4s + t = 0 \\ -4s + 2(2-2s-2t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{6} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$$

となるから、

$$\overline{\text{DH}} = \frac{\overline{\text{DA}} + 4\overline{\text{DB}} + \overline{\text{DC}}}{6}$$

と求められる。

(2)

(1)より

$$\overline{\text{OH}} = \overline{\text{OD}} + \overline{\text{DH}}$$

$$= (-3, -2, 1) + \frac{\overline{\text{DA}} + 4\overline{\text{DB}} + \overline{\text{DC}}}{6}$$

$$= (-3, -2, 1) + \frac{1}{6} \cdot (2, 0, 0) + \frac{2}{3} \cdot (0, 1, 0) + \frac{1}{6} \cdot (0, 0, 2)$$

$$= \left(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

となるから、点 H の座標は、 $\left(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right)$ と求められる。

(3)

(2)より、

$$\overline{\text{DH}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

であるから、その長さは、

$$\begin{aligned} |\overline{\text{DH}}| &= \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{6}{9}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

となる。

(4)

$\triangle \text{CHP}$ は平面 α にあるため、四面体 DABC、四面体 DCHP とともに高さは DH となるから、 V_1 と V_2 の比は $\triangle \text{ABC}$ と $\triangle \text{CHP}$ の面積比と等しくなる。ここで、

$$\begin{aligned} \overline{\text{DH}} &= \frac{\overline{\text{DA}} + 4\overline{\text{DB}} + \overline{\text{DC}}}{6} \\ \Leftrightarrow \overline{\text{DH}} &= \frac{(\overline{\text{DH}} - \overline{\text{AH}}) + 4(\overline{\text{DH}} - \overline{\text{BH}}) + (\overline{\text{DH}} - \overline{\text{CH}})}{6} \\ \Leftrightarrow \overline{\text{AH}} &= -4\overline{\text{BH}} - \overline{\text{CH}} \\ \Leftrightarrow \overline{\text{AH}} &= -4(\overline{\text{AH}} - \overline{\text{AB}}) - (\overline{\text{AH}} - \overline{\text{AC}}) \\ \Leftrightarrow \overline{\text{AH}} &= \frac{2}{3}\overline{\text{AB}} + \frac{1}{6}\overline{\text{AC}} \end{aligned}$$

となり、また点 P は直線 AH と線分 BC の交点であるから、実数 k を用いて、

$$\begin{aligned} \overline{\text{AP}} &= k\overline{\text{AH}} \\ &= \frac{2}{3}k\overline{\text{AB}} + \frac{1}{6}k\overline{\text{AC}} \end{aligned}$$

と表すことができる。これらの係数の和は 1 となるから、

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}k + \frac{1}{6}k &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{6}k &= 1 \\ \therefore k &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

となる。よって $\overline{\text{AP}} = \frac{4}{5}\overline{\text{AB}} + \frac{1}{5}\overline{\text{AC}}$ と求められ、また点 H は線分 AP を 5:1 に、点 P は線分 BC を 1:4 に内分するとわかる。以上より

$$\begin{aligned} \triangle \text{CHP} &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} \triangle \text{ABC} \\ &= \frac{2}{15} \triangle \text{ABC} \end{aligned}$$

となるから、

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{15}{2}$$

と求められる。

〔解答〕

ワ	ヲ	あ	い	う	え	お	か	き	く	け	こ
4	2	2	3	4	1	2	3	4	1	1	2
さ	し	す									
3	8	0									

〔解説〕

問題文より、①と②の交点 P は、

$$\begin{aligned} (2x^2)^2 &= 4t^3x \\ \Leftrightarrow 4x^4 - 4t^3x &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x(x^3 - t^3) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x(x-t)(x^2 + tx + t^2) &= 0 \\ \therefore x = 0, t \end{aligned}$$

より、 $P(t, 2t^2)$ とわかる。また①より $y' = 4x$ であるから、接線 ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned} y - 2t^2 &= 4t(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= 4tx - 2t^2 \end{aligned}$$

と求められる。次に、点 P は第一象限にあるから、②より、

$$\begin{aligned} y^2 &= 4t^2x \\ \Leftrightarrow y &= 2t\sqrt{tx} \quad (\because y > 0) \\ \therefore y' &= 2t\sqrt{t} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

であるから、②の接線 m の傾きは t と求められる。ここで、接線 ℓ, m と x 軸のなす角をそれぞれ α, β とおくと、 $\tan \alpha = 4t, \tan \beta = t$ であるから

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{3t}{1 + 4t^2} \end{aligned}$$

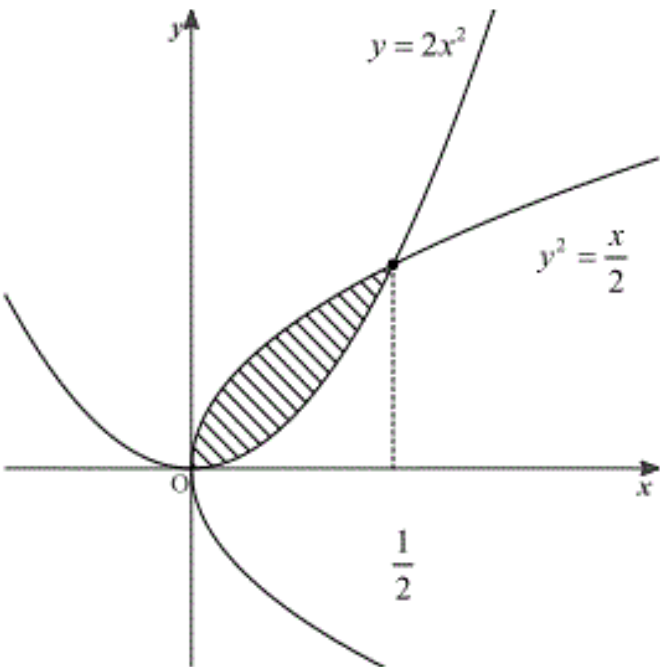
と表せる。この値に対して、 $t > 0$ であるから、相加相乗平均の関係より、

$$\begin{aligned} \frac{3t}{1 + 4t^2} &= \frac{3}{\frac{1}{t} + 4t} \\ &\leq \frac{3}{2\sqrt{\frac{1}{t} \cdot 4t}} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となる。また等号が成立するのは、

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} &= 4t \\ \Leftrightarrow 4t^2 &= 1 \\ \therefore t &= \frac{1}{2} \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

のときである。 $t = \frac{1}{2}$ のとき、2つの放物線①、②で囲まれた部分 D を図示すると以下の通りである。



図より、①と②で囲まれた部分 D の面積は、

$$\begin{aligned} D &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{2x}}{2} - 2x^2 \right) dx \\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} x^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

と求められる。またこの領域 D を x 軸周りに 1 回転させてできる立体の面積を V とおくと、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(\frac{\sqrt{2x}}{2} \right)^2 - (2x^2)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}x - 4x^4 \right) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{5}x^5 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{40} \right) \pi \\ &= \frac{3}{80} \pi \end{aligned}$$

と求められる。