

【解答】

(1)	ア	イ	ウ			
	5	7	2			
(2)	エ	オ	カ			
	1	1	2			
(3)	キ	ク	ケ			
	1	6	4			
(4)	コ	サ	シ	ス	セ	
	3	5	4	3	2	

【解説】

反時計回りを正, 時計回りを負として動いた長さを測ることとする。また, 1, 2, 3 回目に動いた長さを a, b, c とおく。ただし, a, b, c は $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ のいずれかであり, これらの値をとる確率は同様に確からしい。

(1)

この試行を 2 回続けて行ったとき, P が C の位置にあるのは, $a+b=6+12k$ (k は整数) のときである。 $-12 \leq a+b \leq 12$ より, $a+b$ のとる値は 6, -6 のいずれかとなる。 $a+b=6$ となるのは $(a, b) = (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ の 5 通りであり, $a+b=-6$ となる (a, b) の組も対称性より 5 通りである。したがって, 求める確率は,

$$\frac{2 \cdot 5}{12^2} = \frac{5}{72}$$

である。

(2)

この試行を 2 回続けて行ったとき, P が B の位置にあるのは, $a+b=3+12k$ (k は整数) のときである。 $-12 \leq a+b \leq 12$ より, $a+b$ のとる値は 3, -9 のいずれかとなる。 $a+b=3$ となるのは $(a, b) = (1, 2), (2, 1), (4, -1), (5, -2), (6, -3), (-1, 4), (-2, 5), (-3, 6)$ の 8 通りであり, $a+b=9$ となるのは $(a, b) = (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$ の 4 通りである。したがって, 求める確率は,

$$\frac{8+4}{12^2} = \frac{1}{12}$$

である。

(3)

この試行を 3 回続けて行ったとき, P が常に反時計回りに動いて, 図の点 E の位置にあるのは, a, b, c がすべて正であり, $a+b+c=10+12k$ (k は整数) のときである。 $3 \leq a+b+c \leq 18$ より, $a+b+c$ のとる値は 10 のみとなる。 $\{a, b, c\}$ の組み合わせは, $\{6, 3, 1\}, \{6, 2, 2\}, \{5, 4, 1\}, \{5, 3, 2\}, \{4, 4, 2\}, \{4, 3, 3\}$ であり, a, b, c の並べ替えを考慮すると, 求める確率は,

$$\frac{3 \cdot 3! + 3 \cdot {}_3C_1}{12^3} = \frac{1}{64}$$

である。

(4)

この試行を 3 回続けて行ったとき, P が A の位置にあるのは, $a+b+c=12k$ (k は整数) のときである。 $-18 \leq a+b+c \leq 18$ より, $a+b+c$ のとる値は $-12, 0, 12$ のいずれかとなる。

$a+b+c=12$ となる $\{a, b, c\}$ の組み合わせは,

$\{6, 5, 1\}, \{6, 4, 2\}, \{6, 3, 3\}, \{5, 5, 2\}, \{5, 4, 3\}, \{4, 4, 4\}$ であり, a, b, c の並べ替えを考慮すると, (a, b, c) の組は, $3 \cdot 3! + 2 \cdot {}_3C_1 + 1 \cdot 1 = 25$ (通り) である。 $a+b+c=-12$ となる (a, b, c) の組も対称性より 25 通りである。次に, $a+b+c=0$ となる $\{a, b, c\}$ の組み合わせを考える。 a, b, c がすべて正, またはすべて負のときは満たさない。 a, b, c のうち 2 つが正, 1 つが負となるのは, $\{-2, 1, 1\}, \{-3, 2, 1\}, \{-4, 3, 1\}, \{-4, 2, 2\}, \{-5, 4, 1\}, \{-5, 3, 2\}, \{-6, 5, 1\}, \{-6, 4, 2\}, \{-6, 3, 3\}$ であり, a, b, c の並べ替えを考慮すると, (a, b, c) の組は, $6 \cdot 3! + 3 \cdot {}_3C_1 = 45$ (通り) である。 a, b, c のうち 1 つが正, 2 つが負となる (a, b, c) の組も対称性より 45 通りである。以上より, 求める確率は,

$$\frac{2 \cdot 25 + 2 \cdot 45}{12^3} = \frac{35}{432}$$

である。

【解答】

(1)	ソ				
	2				
(2)	タ	チ	ツ		
	1	3	2		
(3)	テ				
	4				
(4)	ト	ナ	ニ	ヌ	
	2	5	1	2	
(5)	ネ				
	6				
(6)	ノ				
	2				

【解説】

①を解くと

$$\begin{aligned}
 ax^2 + 2(a-1)x - 4 &< 0 \\
 \Leftrightarrow a\left(x - \frac{2}{a}\right)(x+2) &< 0 \quad (\because a \neq 0) \\
 \Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{a}\right)(x+2) &< 0 \quad (\because a > 0) \\
 \therefore -2 < x < \frac{2}{a} \quad & \left(\because -2 < \frac{2}{a}\right)
 \end{aligned}$$

であり、②を解くと、

$$\begin{aligned}
 3x^2 + (3a-1)x - a &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow (3x-1)(x+a) &\geq 0 \\
 \therefore x \leq -a, \frac{1}{3} \leq x &\left(\because -a < \frac{1}{3}\right)
 \end{aligned}$$

である。

(1)

 $a=1$ のとき、①、②を同時に満たす x の範囲は、 $-2 < x < 2$ かつ $x \leq -1, \frac{1}{3} \leq x$ より

$$-2 < x \leq -1, \frac{1}{3} \leq x < 2$$

である。これを満たす整数 x は、 $x=-1, 1$ の2個存在する。

(2)

 $2 < a < 6$ のとき、 $-a < -2$ かつ $\frac{1}{3} < \frac{2}{a}$ であるから、①、②を同時に満たす x の範囲は、 $-2 < x < \frac{2}{a}$ かつ $x \leq -a, \frac{1}{3} \leq x$ より、

$$\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{a}$$

である。

(3)

 $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$ より $x = \frac{1}{2}$ は②を常に満たす。よって、①を満たす a の値の範囲は

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} &< \frac{2}{a} \\
 \Leftrightarrow a &< 4 \quad (\because a > 0)
 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $a > 0$ より $0 < a < 4$ となる。

(4)

 $-a < 0, 0 < \frac{1}{3}$ より $x=0$ は②の解でない。よって、①の $x=0$ 以外の解が少なくとも5個あることが必要である。 $\frac{2}{a}$ は、 a の増加に伴い、正の実数の範囲で連続的に減少するものであるから、①に $x=-1, 1, 2, 3, 4$ が解として含まれることが必要。したがって、

$$\begin{aligned}
 4 &< \frac{2}{a} \\
 \Leftrightarrow a &< \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

が必要である。このとき、 $-a \geq -\frac{1}{2}$ であるから確かに $x=-1, 1, 2, 3, 4$ は②の解となる。したがって①、②を同時に満たす整数 x がちょうど5個存在する a の値の範囲は

$$\begin{aligned}
 4 &< \frac{2}{a} \leq 5 \\
 \Leftrightarrow \frac{2}{5} &\leq a < \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

となる。

(5)

①、②を同時に満たす実数 x が存在しないとき、 $-2 < x < \frac{2}{a}$ かつ $x \leq -a, x \geq \frac{1}{3}$ のどちらをも満たす実数 x が存在しないということだから、 a の値の範囲は

$$\begin{aligned}
 -a &\leq -2 \text{ かつ } \frac{2}{a} \leq \frac{1}{3} \\
 \Leftrightarrow a &\geq 2 \text{ かつ } a \geq 6 \\
 \Leftrightarrow a &\geq 6
 \end{aligned}$$

となる。

(6)

①、②を同時に満たす整数 x が存在しないため、 $x=\pm 1$ が満たさないことが必要である。このとき、 $x=\pm 1$ が $-2 < x < \frac{2}{a}$ と $x \leq -a, x \geq \frac{1}{3}$ を同時に満たさないから、

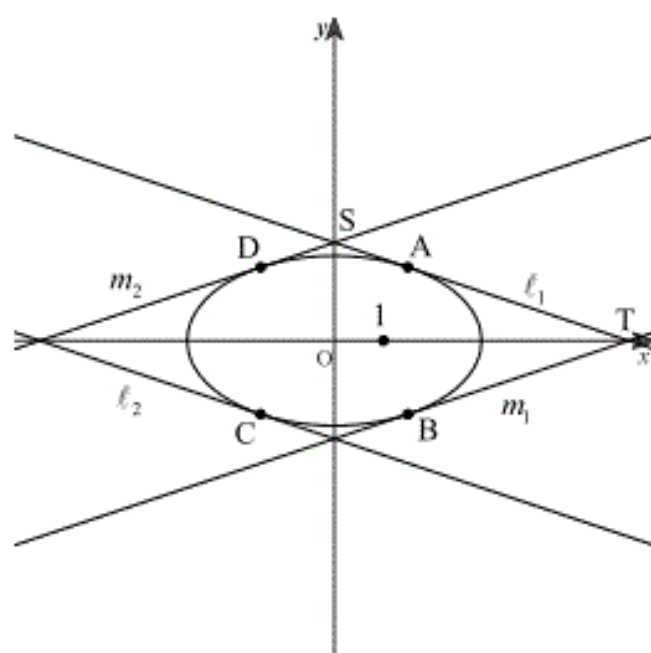
$$\begin{aligned}
 -a &< -1 \text{ かつ } \frac{2}{a} \leq 1 \\
 \Leftrightarrow a &> 1 \text{ かつ } 2 \leq a \\
 \Leftrightarrow a &\geq 2
 \end{aligned}$$

が必要である。このとき、 $-a \leq -2$ かつ $\frac{2}{a} \leq 1$ より①、②を同時に満たす整数 x が存在せず、十分である。したがって、①、②を同時に満たす整数 x が存在しない a の範囲は $a \geq 2$ である。

[解答]

ワ	ヲ	あ	い	う	え	お	か	き	く	け	こ	さ	し
1	0	2	3	2	3	2	6	0	3	4	2	4	9

[解説]



点Pの座標を (X, Y) とおくと、 $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{3} = 1$ を満たす。点Pと点 $(1, 0)$ の距離は、

$$\begin{aligned}\sqrt{(X-1)^2 + (Y-0)^2} &= \sqrt{X^2 - 2X + 1 + \left(3 - \frac{X^2}{3}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}X^2 - 2X + 4} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}\left(X - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}}\end{aligned}$$

であるから、 $X = \frac{3}{2}$ のとき、最小値 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ をとる。このとき、 $Y = \pm\sqrt{3 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \pm\frac{3}{2}$ であるから、

$A\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $B\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ となる。点Pにおける接線の方程式は $\frac{Xx}{9} + \frac{Yy}{3} = 1$ で表されるから、Aに

おける①の接線 ℓ_1 の方程式は $\frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1$, Bにおける①の接線 m_1 の方程式は $\frac{x}{6} - \frac{y}{2} = 1$ となる。

したがって、 ℓ_1 と m_1 の交点Tの座標は、これらを連立して、 $T(6, 0)$ である。また、 ℓ_1 とy軸の交点Sの座標は、 $S(0, 2)$ である。原点をOとし、 $\angle STO = \theta$ とおくと、 $\tan \theta = \frac{1}{3}$ である。

$\angle ATB = 2\theta$ であるから、2倍角の定理より、

$$\tan \angle ATB = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$$

である。4本の直線 ℓ_1, m_1, ℓ_2, m_2 で囲まれた平行四辺形の面積は、 $\triangle OST$ の面積の4倍であるから、 $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 24$ である。また、楕円は原点に対して対称であるから、AとC、Bと

Dは原点に関して対称である。したがって $C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, $D\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ であり、四角形ABCDは一辺3の正方形であるから、その面積は $3^2 = 9$ である。