

1

【解答】

(1)	ア				
	5				
(2)	イ	ウ	エ	オ	
	0	1	3	6	
(3)	カ	キ	ク		
	5	5	4		
(4)	ケ	コ	サ		
	1	2	4		
(5)	シ	ス	セ	ソ	
	6	7	7	2	

【解説】

- (1) L の値が最大になるためには、 $a+k$ の値が必ず1より大きくなることを考慮して $a+k$ の値を最小に、 bc の値を最大にすれば良い。よって、 $a=k=1, b=c=6$ のときで、 $L=\log_2 36$ である。 $2^5 < 36 < 2^6$ より、 $5 < \log_2 36 < 6$ である。したがって、これを超えない最大の整数は5である。
- (2) $a+k > 1, bc \geq 1$ より、 L の値が最小となるのは、 $bc=1$ 、つまり $b=c=1$ のときで $L=0$ が最小となる。 a, k はそれぞれどの値をとってもよいから、 $b=c=1$ となる確率は、 $\frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$ である。
- (3) $a+k$ の値で場合分けして考える。このとき、 $bc=1$ では、 L の値は0であり、自然数とならないことに注意する。
- [1] $a+k=2$ のとき、
 a, k の値の取り方は $(a, k)=(1, 1)$ の1通りである。 b, c の値の取り方は自然数 s を用いて $bc=2^s$ となれば良いので、 $(b, c)=(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 4)$ の8通りである。よって、 $\frac{1 \cdot 8}{2 \cdot 6^3} = \frac{1}{54}$ である。
- [2] $a+k=3$ のとき、
 a, k の値の取り方は $(a, k)=(1, 2), (2, 1)$ の2通りである。 b, c の値の取り方は自然数 s を用いて $bc=3^s$ となれば良いので、 $(b, c)=(1, 3), (3, 1), (3, 3)$ の3通りである。よって、 $\frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 6^3} = \frac{1}{72}$ である。
- [3] $a+k=4$ のとき、
 a, k の値の取り方は $(a, k)=(2, 2), (3, 1)$ の2通りである。 b, c の値の取り方は自然数 s を用いて $bc=4^s$ となれば良いので、 $(b, c)=(1, 4), (2, 2), (4, 1), (4, 4)$ の4通りである。よって、 $\frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 6^3} = \frac{1}{54}$ である。
- [4] $a+k=5$ のとき、
 a, k の値の取り方は $(a, k)=(3, 2), (4, 1)$ の2通りである。 b, c の値の取り方は自然数 s を用いて $bc=5^s$ となれば良いので、 $(b, c)=(1, 5), (5, 1), (5, 5)$ の3通りである。よって、 $\frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 6^3} = \frac{1}{72}$ である。
- [5] $a+k=6$ のとき、
 a, k の値の取り方は $(a, k)=(4, 2), (5, 1)$ の2通りである。 b, c の値の取り方は自然数 s を用いて $bc=6^s$ となれば良いので、 $(b, c)=(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1), (6, 6)$ の5通りである。よって、 $\frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 6^3} = \frac{5}{216}$ である。
- [6] $a+k=7$ のとき、
 b, c の値の取り方は自然数 s を用いて $bc=7^s$ となれば良いが、取りえる b, c の値は存在しない。よって、このときの確率は0である。
- [7] $a+k=8$ のとき、
 a, k の値の取り方は $(a, k)=(6, 2)$ の1通りのみである。 b, c の値の取り方は自然数 s を用いて $bc=8^s$ となれば良いので、 $(b, c)=(2, 4), (4, 2)$ の2通りである。よって、 $\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 6^3} = \frac{1}{216}$ である。
- 以上より、求める確率は $\frac{1}{54} + \frac{1}{72} + \frac{1}{54} + \frac{1}{72} + \frac{5}{216} + \frac{1}{216} = \frac{5}{54}$ である。
- (4) $a+k \geq 4$ のとき、 L の値が $3 \leq L \leq 4$ であるためには、 $bc \geq 4^3 = 64$ であることが必要だが、 bc は最大で36であるから、不適である。よって、 $a+k=2, 3$ で考える。
- [1] $a+k=2$ のとき、
 a, k の値の取り方は $(a, k)=(1, 1)$ の1通りである。 b, c の値の取り方は $2^3=8, 2^4=16$ であることを考慮して、 $8 \leq bc \leq 16$ より $(b, c)=(2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 2), (5, 3), (6, 2)$ の12通りである。よって、 $\frac{1 \cdot 12}{2 \cdot 6^3} = \frac{1}{36}$ である。
- [2] $a+k=3$ のとき、
 a, k の値の取り方は $(a, k)=(1, 2), (2, 1)$ の2通りである。 b, c の値の取り方は $3^3=27, 3^4=81$ であることを考慮して、 $27 \leq bc \leq 81$ より、 $(b, c)=(5, 6), (6, 5), (6, 6)$ の3通りである。よって、 $\frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 6^3} = \frac{1}{72}$ である。
- 以上より、求める確率は、 $\frac{1}{36} + \frac{1}{72} = \frac{1}{24}$ である。
- (5) L の値が0.5以下となる確率を考える。 $\log_{a+k} bc \leq 0.5$ であるから、 $a+k > 1$ より、 $bc \leq \sqrt{a+k} \cdots \textcircled{1}$ である。 $2 \leq a+k \leq 8$ より、 $1 \leq \sqrt{a+k} < 2, 2 \leq \sqrt{a+k} < 3$ で場合分けして考える。
- [1] $1 \leq \sqrt{a+k} < 2$ のとき、つまり、 $a+k=2, 3$ のとき
 a, k の値の取り方は $(a, k)=(1, 1), (1, 2), (2, 1)$ の3通りである。 bc は自然数より、 b, c の値の取り方は、 $\textcircled{1}$ 式から、 $bc=1$ のみであり、 $(b, c)=(1, 1)$ の1通りである。よって、この確率は $\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 6^3} = \frac{1}{144}$ である。
- [2] $2 \leq \sqrt{a+k} < 3$ のとき、つまり、 $4 \leq a+k \leq 8$ のとき
 a, k の値の取り方は $(a, k)=(2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2), (6, 1), (6, 2)$ の9通りである。 b, c の値の取り方は、 $\textcircled{1}$ 式から、 $bc=1, 2$ であり、 $(b, c)=(1, 1), (1, 2), (2, 1)$ の3通りである。よって、 $\frac{9 \cdot 3}{2 \cdot 6^3} = \frac{1}{16}$ である。
- 以上より、 L の値が0.5以下となる確率は、 $\frac{1}{144} + \frac{1}{16} = \frac{5}{72}$ であり、求める確率は、この余事象であるから、 $1 - \frac{5}{72} = \frac{67}{72}$ である。

【解答】

タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
6	2	6	2	2	6	2
ヌ	ネ	ノ	ハ			
2	3	4	3			
ヒ	フ	ヘ	ホ	マ		
2	2	4	3	3		

【解説】

直線 $y = x + a$ ……① と円 $x^2 + y^2 = 4$ ……② の異なる2つの共有点を点P, Qとする。2点を通る直線の傾きは1であり、2点の x, y 座標の距離を考えると、三角形OPQは正三角形であるので2点の距離が2であるから、 x 座標の距離は $\sqrt{2}$ となる。式 $x^2 + y^2 = 4$ に直線の式 $y = x + a$ を代入して、 $x^2 + (x + a)^2 = 4$ より、これを解いて、

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{-a^2 + 8}}{2} \quad \dots\dots ③$$

となるから、2点の x 座標の距離は、 $\sqrt{-a^2 + 8}$ で表される。これが $\sqrt{2}$ となればよいから、

$$\begin{aligned} \sqrt{-a^2 + 8} &= \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow a &= \pm\sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。点Aについて、Aの x 座標はBの x 座標より大きいことを加味して、③式に $a = \sqrt{6}$ を

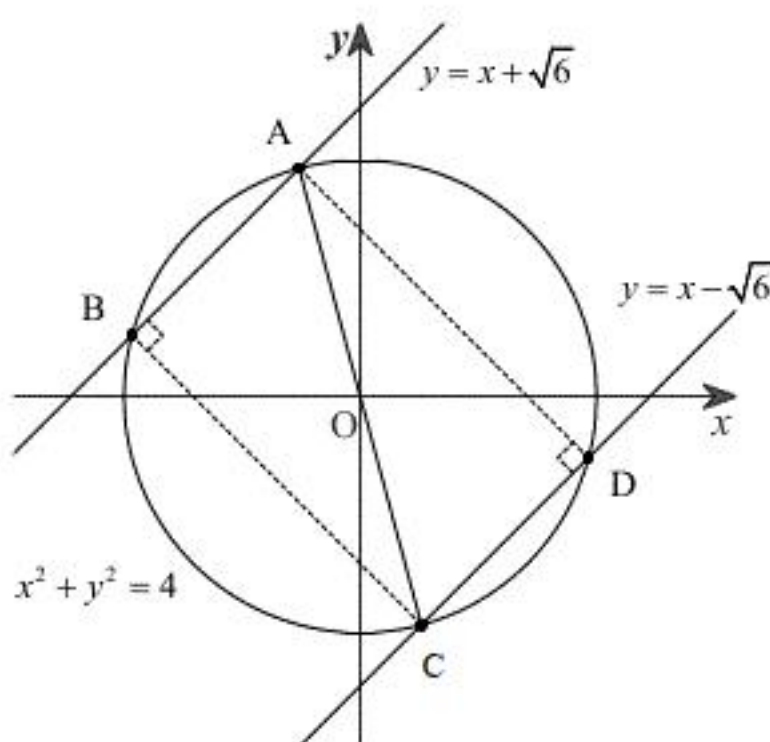
代入して、 $x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$ となる。 $y = x + \sqrt{6}$ より、 $y = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ であるから、点Aの座標は、

$\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right)$ となる。ここで、2つの直線 $y = x + \sqrt{6}$ と $y = x - \sqrt{6}$ 、そして円 $x^2 + y^2 = 4$

は原点对称であるので、直線ACは原点を通る。よって、線分ACは円 $x^2 + y^2 = 4$ の直径にあたり、 $\angle ADC = 90^\circ$ となる。したがって、 $AC = 4$ であり、 $AB = 2$ より $CD = 2$ なので $\angle ADC = 90^\circ$

から三平方の定理より、 $AD = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ である。同様に $\angle ABC = 90^\circ$ 、ABとDCは平行で

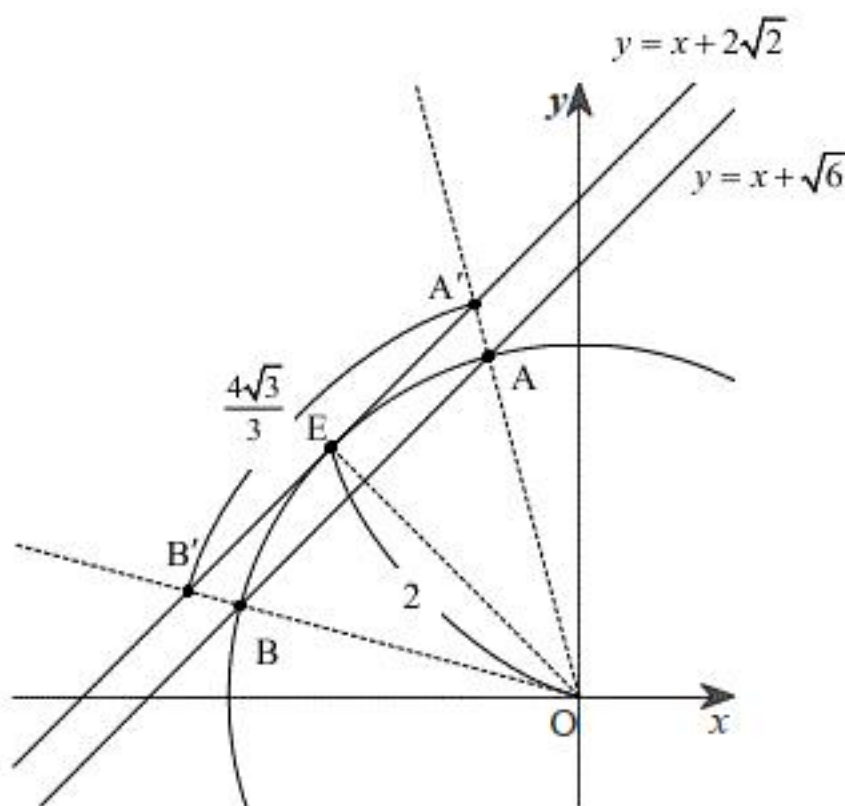
あるから、ADCBは長方形であり、この面積は、 $2\sqrt{3} \cdot 2 = 4\sqrt{3}$ となる。



ここで、 y 切片が正であり①式と平行で、②式に接する直線を $y = x + b$ ……④ とおく。ただし、 $b > 0$ である。このとき、②④式は接しているので、④式の直線 $x - y + b = 0$ と②式の中心である原点の距離は、②式の半径2と一致する。よって点と直線の距離の公式より、

$$\frac{|0 \cdot x - 0 \cdot y + b|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow |b| = 2\sqrt{2}$$

であり、 $b > 0$ より、 $b = 2\sqrt{2}$ である。ここで下図のとおり、直線OA, OBと④式の交点をそれぞれ点A', B'とする。また、②式と④式の交点をEとおく。



①④式は平行なので同位角より、 $\angle OAB = \angle OA'B'$ 、 $\angle OBA = \angle OB'A'$ より、三角形OABと三角形OA'B'は相似であるから、三角形OA'B'も正三角形である。②④式は接しているので、

$\angle A'EO = 90^\circ$ である。よって $OE = 2$ より、正三角形OA'B'の一边は $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ である。したがって、

正三角形A'OB'の面積は、 $\frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot 2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ である。

3

【解答】

ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ	ヨ	
3	2	2	2	3	6	3	
ラ	リ	ル	レ	ロ	ワ	ヲ	あ
3	2	2	1	2	1	3	6

【解説】

与えられた条件より、

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。また、点 P, Q も球面上に存在するため、 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$ はともに大きさが1のベクトルであるから、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \left| \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OC} \right|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}|^2 + \overrightarrow{OA} \cdot s\overrightarrow{OC} + s^2|\overrightarrow{OC}|^2 &= 1 \end{aligned}$$

である。①②式より、

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + s^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow s &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。 s は正の定数より、 $s = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。同様に、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OQ}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \left| \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \right|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{9}|\overrightarrow{OB}|^2 + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} \cdot t\overrightarrow{OC} + t^2|\overrightarrow{OC}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{9} + t^2 &= 1 \end{aligned}$$

となり、 t の値は正であるから、 $t = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ である。また、 $\cos \angle POQ$ の値は、内積の定義から、

$$\cos \angle POQ = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|}$$

によって求められる。 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ はともに大きさが1のベクトルであるから、 $\cos \angle POQ$ の値は、②式より、

$$\begin{aligned} \cos \angle POQ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \\ &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OC} \right) \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\overrightarrow{OC} \right) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、点 H は、平面 OPQ 上にあるから、 $\overrightarrow{OH}$ は、 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ および実数 k, l を用いて、

$$\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{OP} + l\overrightarrow{OQ}$$

とおける。よって、 $\overrightarrow{CH}$ は、 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, k, l を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} &= k\overrightarrow{OP} + l\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{2}k\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}l\overrightarrow{OB} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k + \frac{2\sqrt{2}}{3}l - 1 \right) \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

と表せる。 $\overrightarrow{CH}$ は平面 OPQ と垂直であるから、 $\overrightarrow{CH}$ は、 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ ととも垂直である。したがって、それぞれ $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OP} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \frac{1}{2}k\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}l\overrightarrow{OB} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k + \frac{2\sqrt{2}}{3}l - 1 \right) \overrightarrow{OC} \right\} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OC} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow k + \frac{\sqrt{6}}{3}l - \frac{\sqrt{3}}{2} &= 0 \quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2}) \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が成立する。同様に、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \frac{1}{2}k\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}l\overrightarrow{OB} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k + \frac{2\sqrt{2}}{3}l - 1 \right) \overrightarrow{OC} \right\} \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\overrightarrow{OC} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{3}k + l - \frac{2\sqrt{2}}{3} &= 0 \quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2}) \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

が成立する。

$$\textcircled{3}\textcircled{4}\text{式を解いて、} k = \frac{\sqrt{3}}{6}, l = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ より、} \overrightarrow{CH} = \frac{\sqrt{3}\overrightarrow{OA} + 2\sqrt{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}}{12} \text{ である。}$$

また、 $\overrightarrow{CH}$ の大きさについて、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CH}|^2 &= \left| \frac{\sqrt{3}\overrightarrow{OA} + 2\sqrt{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}}{12} \right|^2 \\ &= \frac{1}{12^2} \left(3|\overrightarrow{OA}|^2 + 8|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + 4\sqrt{6}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - 4\sqrt{2}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - 2\sqrt{3}\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} \right) \\ &= \frac{1}{12^2} (3+8+1) \quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2}) \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

であるので、 $|\overrightarrow{CH}| = \frac{\sqrt{3}}{6}$ とわかる。また、三角形 OPQ の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 |\overrightarrow{OQ}|^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{1 \cdot 1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

となる。よって、三角錐 OCPQ の体積は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{36}$$

である。

4

【解答】

い	う	え	お	か				
1	2	2	4	5				
き	く	け	こ	さ	し	す	せ	
2	5	3	0	7	2	2	2	

【解説】

関数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$ の1階微分は、

$$f'(x) = \frac{1-x^4}{(x^4+1)^{\frac{3}{2}}}$$

であり、これが $f'(x)=0$ となるのは、 $x \geq 0$ より、 $x=1$ のときである。また、2階微分は $f'(x)$ をさらに微分して、

$$f''(x) = \frac{2x^7-10x^5}{(x^4+1)^{\frac{5}{2}}}$$

となり、これが $f''(x)=0$ となるのは、 $x \geq 0$ より、 $x=\sqrt[4]{5}$ のときである。よって、この関数の増減表は以下のとおりである。

x	0	...	1	...	$\sqrt[4]{5}$	...
$f'(x)$	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	0	↗	極大	↘	$f(\sqrt[4]{5})$	↘

したがって、 $x=1$ において、極大値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ をとる。また $f'(x)$ は $x=\sqrt[4]{5}$ の前後で符号を変えるから $f(x)$ は $x=\sqrt[4]{5}$ において変曲点となる。この変曲点における接線の傾きは、

$f'(\sqrt[4]{5}) = -\frac{\sqrt{6}}{9}$ であるから、変曲点の座標が $(\sqrt[4]{5}, \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{6}})$ であることを考慮して、接線の式は、

$$y = -\frac{\sqrt{6}}{9}(x - \sqrt[4]{5}) + \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{6}}{9}x + \frac{5\sqrt{6}\sqrt[4]{5}}{18}$$

となる。この、 x, y 軸との切片は、接線の式にそれぞれ $y=0, x=0$ 代入して、

$(\frac{5\sqrt[4]{5}}{2}, 0), (0, \frac{5\sqrt{6}\sqrt[4]{5}}{18})$ であるから、原点とこの2点からなる直角三角形の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt[4]{5}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{6}\sqrt[4]{5}}{18} = \frac{25\sqrt{30}}{72}$$

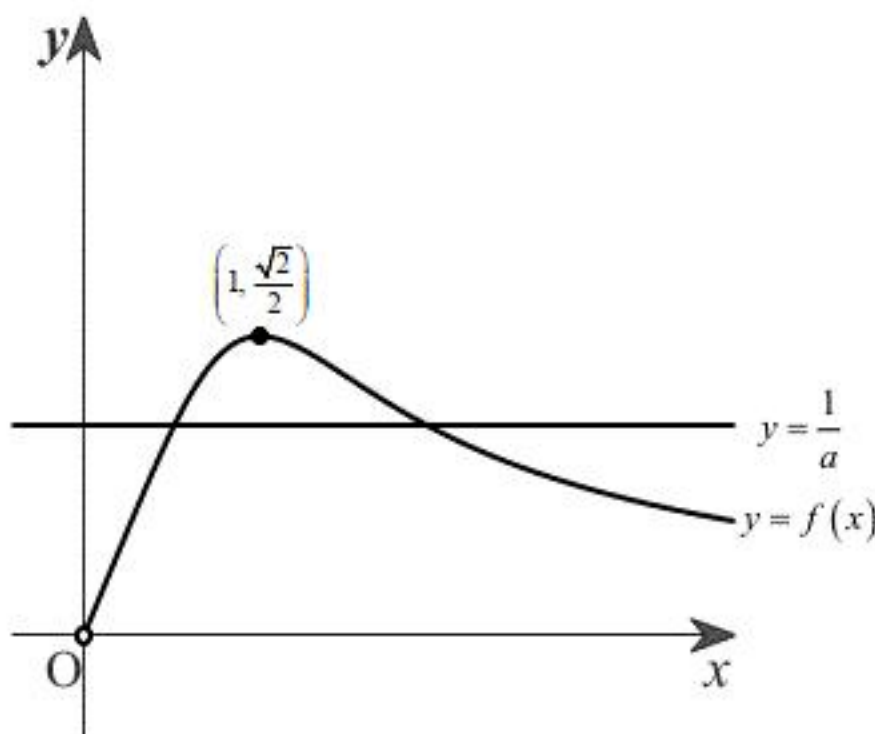
となる。次に、方程式 $\sqrt{x^4+1} = ax$ について、 $a > 0, \sqrt{x^4+1} > 0$ より $x > 0$ である。これを变形して、

$$\frac{x}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{a}$$

を考える。左辺 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$ について、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} = 0$$

より、 $y=f(x)$ は以下のようなグラフとなる。



よって、これと $y=\frac{1}{a}$ が異なる2個以上の交点を持つのは、

$$0 < \frac{1}{a} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a > \sqrt{2}$$

のときであり、このとき、 $x < 1, 1 < x$ にそれぞれ解を1個ずつ、合計2個の異なる解を持つ。