

平成 10 年度入学者選抜学力検査問題

数 学

理	学	部
医	学	部
医	学	科
薬	学	部
工	学	部

(注 意)

- 1 問題紙は指示のあるまで開かないこと。
- 2 問題紙は本文 2 ページであり、答案用紙は 4 枚である。
- 3 問題 **4** , **4'** は選択問題である。必ずどちらか一方だけを選択して解答せよ。選択しなかった問題の解答は、いっさい書かないこと。
- 4 答えはすべて答案用紙の指定のところに記入すること。
- 5 問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

1 k は $k > 0$, $k \neq 1$ をみたし, θ は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ をみたす実数とする。次の問いに答えよ。

- (1) 座標平面上で, 2 定点 $A(0, 1)$, $B(\cos \theta, \sin \theta)$ からの距離の比が $1:k$ であるような点の軌跡は円となることを示し, その中心 (X, Y) および半径 r を k と θ を用いて表せ。
- (2) θ は固定したままで, k のみを与えられた範囲で動かすとき, (X, Y) のえがく軌跡を求めよ。
- (3) k, θ を与えられた範囲でともに動かすとき, (X, Y) の存在する領域を図示せよ。

2 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ で与える。

実数 x, y と自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, x_n, y_n を

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

により定める。ただし, A^n は A の n 個の積である。

- (1) $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ であることを示せ。
- (2) $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$ の範囲で, $x_n - x$ と $y_n - y$ がともに整数となるような x, y の組 (x, y) の個数を求めよ。

3 $0 < h < 1$ とする。

xy 平面上で, 曲線 $y = e^{-x^2}$ と直線 $y = h$ とで囲まれた図形を, y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(h)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $V(h)$ を求めよ。

(2) 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し,

$$2^n > \frac{n(n+1)}{2}$$

が成立することを示せ。

(3) $h = 2^{-n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} V(2^{-n})$ を求めよ。

4 (選択問題) 次の問いに答えよ。

(1) $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ に対し, 不等式

$$\sin \theta \leq \theta \leq \tan \theta$$

が成立することを示せ。

(2) 正の実数 x と自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, 複素数 $1 + \frac{x}{n}i$ の偏角を θ_n ($0 \leq \theta_n < 2\pi$) とおくとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n$ を求めよ。

(3) (2) で与えた複素数の n 乗 $(1 + \frac{x}{n}i)^n$ の実部を a_n とおくとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

4' (選択問題) 点 $A(1, 2, -1)$ と平面 $\alpha: 2x - y + 2z = 1$ があり, P は直線 $\frac{x}{2} = y + 1 = z - 1$ 上の点とする。次の問いに答えよ。

(1) α に関して, A と対称な点 B の座標を求めよ。

(2) 3点 A, B, P を通る平面を β とする。 α と β の交線と直線 AP が平行になるような P の座標, およびそのときの β の方程式を求めよ。