

1. 平面上に、同一直線上にない3定点 O , A , B があり、線分 OA , OB の長さはそれぞれ 9 , 4 である。動点 P , Q は同時に O を出発し、 P は線分 OA 上を秒速 3 で、 Q は線分 OB 上を秒速 2 でそれぞれ往復運動をくり返しているとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 出発してから初めて P , Q が O で出会うのは何秒後か。

(2) 出発してから 5 秒後の PQ の長さは 4 であった。 $\angle AOB$ の余弦と正弦の値を求めよ。

(3) 出発してから t 秒後の OP , OQ の長さをそれぞれ x , y とする。点 (x, y) の軌跡を $0 \leq t \leq 6$ の範囲で xy 平面上に図示せよ。

2. 方程式 $z^6 + 1 = 0$ を満たす 6 個の複素数を, 偏角 $\theta (0^\circ \leq \theta < 360^\circ)$ の小さい順に $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ を求め, 複素数平面上に図示せよ。

(2) $\alpha_k \alpha_l = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ となる (k, l) を求めよ。

(3) 複素数 $z \neq 0$ に対し, サイコロを振って出た目が k ならば α_k をかけるという操作を行う。こうして得られた複素数に対し, 再びサイコロを振り同じ操作を行って得られる複素数を w とする。複素数 $0, z, w$ の表す 3 点が正三角形をなす確率を求めよ。

3. 2つの2次関数 $y = -x^2 + 1$ と $y = qx^2 + px + 2$ が $0 < x < 1$ の範囲で共有点を持ち、かつその点で共通の接線をもつとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 上の条件を満たすような点 (p, q) を pq 平面上に図示せよ。

(2) 共有点の x 座標を α ($0 < \alpha < 1$) とし、

$$f(x) = \begin{cases} qx^2 + px + 2 & (0 \leq x < \alpha) \\ -x^2 + 1 & (\alpha \leq x \leq 1) \end{cases}$$

とおく。このとき積分 $\int_0^1 f(x) dx$ を p で表せ。