

1. 関数 $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + 2|x| - \frac{15}{16}$ に対して、次の問いに答えよ。

(1) $f(x) \leq 0$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3) $a > 0$ とするとき、 $\int_{-a}^a f(x) dx > 0$ を満たす a の値の範囲を求めよ。

2. 以下の問いに答えよ。

(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 96x - 80$ とする。 $x \geq 14$ ならば $f(x) > 0$ となることを示せ。

(2) 自然数 a に対して,

$$b = \frac{9a^2 + 98a + 80}{a^3 + 3a^2 + 2a}$$

とおく。 b も自然数となるような a と b の組 (a, b) をすべて求めよ。

3. $f(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$ を実数係数の4次多項式とする。

- (1) 複素数 α が方程式 $f(z) = 0$ の解ならば, α と共役な複素数 $\bar{\alpha}$ も解であることを示せ。

以下では, α は虚部が正で絶対値が1より大きい複素数とし, $\alpha, \frac{1}{\alpha}$ がともに方程式 $f(z) = 0$ の解になっているものとする。

- (2) 方程式 $f(z) = 0$ の α と異なる解のうち, 虚部が正であるものを β とする。複素数平面において, 点 α と点 β が直径の両端となる円を C とする。 C の中心と半径を, α の絶対値 r と偏角 θ を用いて表せ。

- (3) 原点 O から (2) の円 C へ接線をひき, 接点の1つを w とする。 w の絶対値を求めよ。