

1

a を正の定数とし、 xy 平面上の曲線 $y = a\sqrt{1-x^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$) を C とする。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対して、点 $A\left(\frac{1}{\cos \theta}, 0\right)$ から曲線 C に接線 l をひき、接点を P とする。

- (1) l の方程式および P の座標を求めよ。
- (2) 直線 $x = -1$ と直線 l および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_1 とし、 x 軸と直線 l および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_2 とする。 S_1, S_2 を求めよ。
- (3) 直線 l と直線 $x = -1$ の交点を B とする。点 P が線分 AB の中点となるならば、 $S_1 = 2S_2$ が成り立つことを示せ。

2

$x > 0$ に対して, 2 次の行列 $A(x)$, B を

$$A(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+3x^2} & 3x \\ x & \sqrt{1+3x^2} \end{pmatrix}, \quad B = A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

と定める。

(1) $x > 1$ のとき, $0 < y < x$ であって $A(x) = A(y)B$ を満たす実数 y が存在することを示せ。

(2) 行列 $A(x)$ の各成分が自然数であるとする。このとき, $A(x) = B^n$ となる自然数 n が存在することを示せ。

3

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ を $r > 1$ かつ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす複素数とする。複素数平面において、 z , $\frac{1}{z}$, $\bar{z}$, $\frac{1}{\bar{z}}$ を表す点をそれぞれ P, Q, R, S とする。ただし、 $\bar{z}$ は z と共役な複素数を表す。

- (1) 点 P, Q, R, S は相異なる 4 点であることを示せ。
- (2) 直線 PQ と直線 RS が直交しているとする。このとき、 r を θ の関数として表し、 θ の動きうる区間 (α, β) を求めよ。
- (3) (2)において、原点と点 $\cos \beta + i \sin \beta$ を通る直線を l とし、点 P と l の距離を d とする。 $\theta \rightarrow \beta$ のとき、 d は 0 に収束することを示せ。

4

以下の問いに答えよ。

- (1) すべての正の数 x, y に対して, 不等式

$$x(\log x - \log y) \geq x - y$$

が成り立つことを証明せよ。また, 等号が成り立つのは $x = y$ の場合に限ることを示せ。

- (2) 正の数 $x_1, \dots, x_n$ が $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ を満たしているとき, 不等式

$$\sum_{i=1}^n x_i \log x_i \geq \log \frac{1}{n}$$

が成り立つことを証明せよ。また, 等号が成り立つのは $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$ の場合に限ることを示せ。