

1. 定積分

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2} (ax + b)^2 dx$$

を $I(a, b)$ とおく。

- (1) $I(a, b)$ を a, b の多項式で表せ。
- (2) $b = a + 1$ のとき, $I(a, b)$ が最小となるような a およびそのときの $I(a, b)$ の値を求めよ。
- (3) $I(a, b) = 1$ かつ $b = ma + n$ となる (a, b) がちょうど1組のとき, 実数 m, n の満たす条件を求めよ。

2. 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = -4$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+3}n - 13 \cdot 2^{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)により定められているとする。

(1) $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおくとき b_n と b_{n+1} の満たす関係式を導き, $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $a_n > a_{n+1}$ となるような n の値をすべて求めよ。

(3) a_n が最小となるような n の値をすべて求めよ。

3. x の 3 次関数 $f(x) = x^3 - kx^2 + 4k$ について以下の問いに答えよ。

(1) $x \geq 0$ のときつねに $f(x) \geq 0$ となるような定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) $y = f(x)$ のグラフが k の値によらずに通る 2 つの点 $A(a, f(a))$,

$B(b, f(b))$ ($a < b$) を求めよ。さらに $a < x < b$ のときつねに $y = f(x)$ のグラフが線分 AB よりも上にあるような定数 k の値の範囲を求めよ。