

①

- (1) $x+y=n$ となるためには、文字列は C を含まなければ
よいので、そのような文字列の個数は

$$2^n \text{ 個} \quad \text{----- (答)}$$

- (2) $x+y=k$ となるためには、文字列は C を $n-k$ 個含み、
残り k 個は a か b であればよい。

$$\therefore F_n(k) = {}_nC_{n-k} \cdot 2^k = {}_nC_k 2^k \quad \text{----- (答)}$$

- (3) 上の結果より

$$\frac{F_n(k)}{F_n(k-1)} = \frac{2^k {}_nC_k}{2^{k-1} {}_nC_{k-1}} = \frac{2(n-k+1)}{k} > 1$$

となる範囲は

$$2(n-k+1) > k \quad \therefore k < \frac{2(n+1)}{3}$$

したがって、 $F_n(k)$ を最大とする k は

$$\left. \begin{array}{ll} n=3m & \text{のとき } k=2m \\ n=3m-2 & \text{のとき } k=2m-1 \\ n=3m-1 & \text{のとき } k=2m, 2m-1 \end{array} \right\} \text{----- (答)}$$

(ただし、 m は自然数)

②

(1) グラフは右図.

$0 \leq x \leq -1$ の範囲の曲線は

$$y = 1 - x^2$$

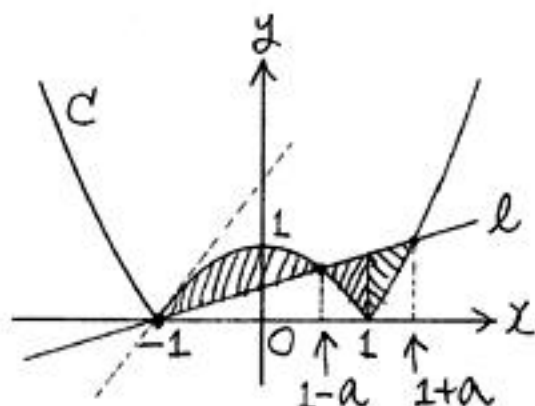
$$\therefore y' = -2x$$

よって, $x = -1$ での接線の

傾きは, $y' = 2$ である.

ゆえに, 図より, 求める範囲は

$$0 < a < 2$$



(答)

(2) $0 \leq x \leq -1$ での交点は

$$a(x+1) = 1 - x^2 \quad \text{と} \quad \text{おいて}$$

$$x^2 + ax + a - 1 = 0$$

$$\therefore (x+1)(x+a-1) = 0 \quad \therefore x = -1, 1-a$$

$x \leq 0, -1 \leq x$ での交点は

$$a(x+1) = x^2 - 1 \quad \text{と} \quad \text{おいて}$$

$$x^2 - ax - a - 1 = 0$$

$$\therefore (x+1)(x-a-1) = 0 \quad \therefore x = -1, 1+a$$

$y = 1 - x^2$ と x 軸が囲む面積を S_1 ,

$y = 1 - x^2$ と l が囲む面積を S_2 ,

$y = x^2 - 1$ と l が囲む面積を S_3 とすると, 2次関数の定積分の公式により

$$S_1 = \frac{1}{6} \cdot 2^3, \quad S_2 = \frac{1}{6} (2-a)^3, \quad S_3 = \frac{1}{6} (2+a)^3$$

であり, これらの組合せで, 求める面積は

$$S = S_3 - 2(S_1 - S_2)$$

$$= \frac{1}{6} (-a^3 + 18a^2 - 12a + 8) \quad \text{----- (答)}$$

(3) S を a の関数として, 微分すると

$$S' = \frac{1}{6} (-3a^2 + 36a - 12)$$

$$= -\frac{1}{2} (a^2 - 12a + 4)$$

$S' = 0$ と解く. a の値は, $a = 6 \pm 4\sqrt{2}$

a	0	----	$6-4\sqrt{2}$	-----	2
S'		-	0	+	
S		↘		↗	

したがって, S は $a = 6 - 4\sqrt{2}$ で最小 ----- (答)

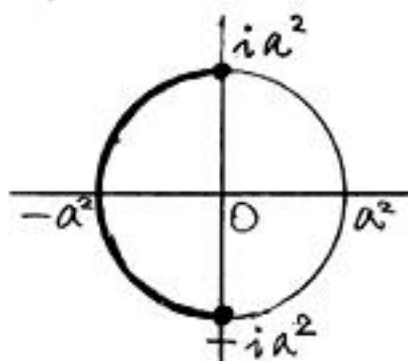
[3]

(1) $w = iz^2 = ia^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

i をかけることは, 90° 回転することと同じだから

$$w = a^2(\cos(2\theta + 90^\circ) + i\sin(2\theta + 90^\circ))$$

よって, w の描く図形は右図



(2) $x=1$ より, z は

$$z = 1 + iy$$

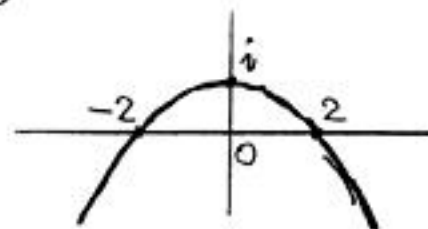
$$\therefore w = i(1 + iy)^2 = -2y + i(1 - y^2)$$

$$w = X + iY \text{ とおくと}$$

$$X = -2y, Y = 1 - y^2$$

これから y を消去すると, $Y = 1 - \frac{X^2}{4}$

よって, w の描く図形は右図



(3) 同様に $y=1$ 上を動く z は

$$z = x + i$$

$$\therefore w = i(x + i)^2 = -2x + i(x^2 - 1)$$

$$w = X + iY \text{ とおくと}$$

$$X = -2x, Y = x^2 - 1$$

これから x を消去すると $Y = \frac{X^2}{4} - 1$

この動く範囲は右上図のような領域であるから,

以上の結果から, この領域の

境界がどのように移るかは

わかるので, w の動く範囲は

右図の領域. 境界上の点

は含む.

