

[1]

(1) 到達点が (p, q) ($p+q \leq n$) となる文字列は

a が p 個, b が q 個, c が $n-p-q$ 個

から成る順列である。よってその個数は

$$F_n(p, q) = nCp \cdot n-pCq \\ = \frac{n!}{p!q!(n-p-q)!} \dots\dots\dots (答)$$

(2) $F_n(p-1, q) \leq F_n(p, q)$ とおくと

$$\frac{n!}{(p-1)!q!(n-p-q+1)!} \leq \frac{n!}{p!q!(n-p-q)!}$$

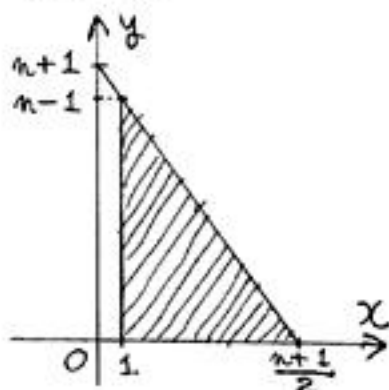
$$\therefore p!(n-p-q)! \leq (p-1)!(n-p-q+1)!$$

$$\therefore p \leq n-p-q+1$$

$$\therefore 2p+q \leq n+1$$

したがって, (p, q) は, 右図
斜線部の領域 (境界含む)
に含まれる格子点の全体.

----- (答)



$F_n(p, q-1) \leq F_n(p, q)$ とおくと

$$\frac{n!}{p!(q-1)!(n-p-q+1)!} \leq \frac{n!}{p!q!(n-p-q)!}$$

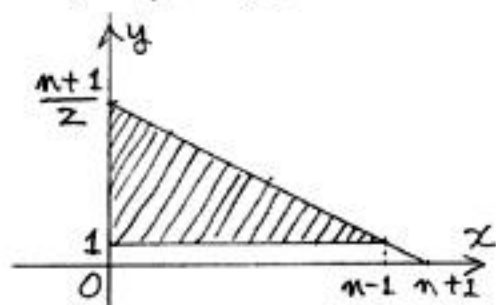
$$\therefore q!(n-p-q)! \leq (q-1)!(n-p-q+1)!$$

$$\therefore q \leq n-p-q+1$$

$$\therefore p+2q \leq n+1$$

したがって, (p, q) は, 右図
斜線部の領域 (境界含む)
に含まれる格子点の全体.

----- (答)



(3) 上で求めた領域の境界を同時に
描けば右図のようになり,

$(\frac{n+1}{3}, \frac{n+1}{3})$ で交わる. これは

格子点である. この点を M とす
る. 右下の図は, この M の周囲
の格子点を図示したもので
ある. 平面上の, $M, A, B, C,$

A', B', C' 以外の任意の点は, その
点から出発し, x 座標または y 座標
を 1 ずつ変化させ, かつ $F_n(p, q)$
の値を増加させるように移動さ
して, M, A, B, C, A', B', C' のいず
れかの点に到達させる. これら
の点については,

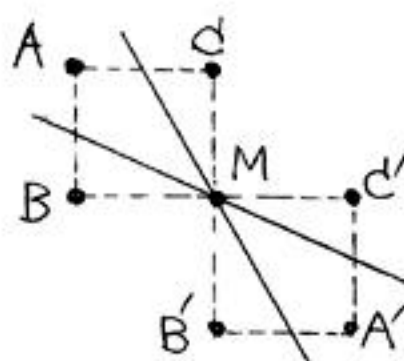
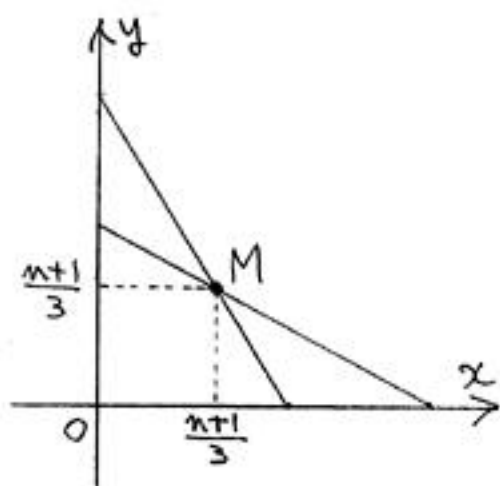
$A \rightarrow B, C \rightarrow M$ とすると $F_n(p, q)$ は増加する

$A' \rightarrow B', C' \rightarrow M$ とすると $F_n(p, q)$ は増加する

B と M, B' と M の $F_n(p, q)$ は等しい.

よって, $F_n(p, q)$ は, M, B, B' で最大となる. つまり

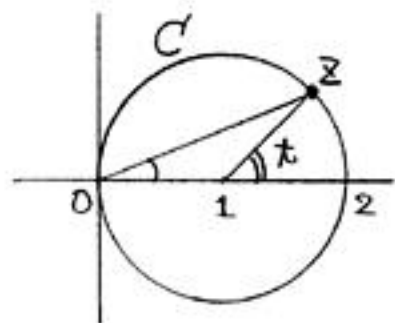
$$(\frac{n+1}{3}, \frac{n+1}{3}), (\frac{n-2}{3}, \frac{n+1}{3}), (\frac{n+1}{3}, \frac{n-2}{3}) \dots\dots (答)$$



②

(1) 円 C は右図のとおり。円周角は中心角の半分だから

$$\arg z = \frac{\tau}{2} \dots\dots\dots (\text{答})$$



絶対値についても, $-\frac{\pi}{2} < \frac{\tau}{2} < \frac{\pi}{2}$ だから $\cos \frac{\tau}{2} > 0$ ので

$$|z| = 2 \cos \frac{\tau}{2} \dots\dots\dots (\text{答})$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{z^2} = z^{-2} &= \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\tau}{2}} (\cos(-\tau) + i \sin(-\tau)) \\ &= \frac{1}{2(1 + \cos \tau)} (\cos(-\tau) + i \sin(-\tau)) \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(2) w = \frac{2i}{z^2} = \frac{1}{1 + \cos \tau} (\sin \tau + i \cos \tau)$$

$w = x + yi$ とおくと

$$x = \frac{\sin \tau}{1 + \cos \tau}, \quad y = \frac{\cos \tau}{1 + \cos \tau}$$

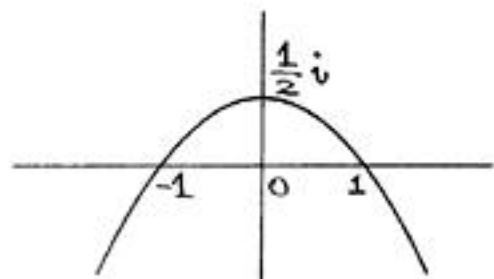
$$\therefore x^2 = \frac{\sin^2 \tau}{(1 + \cos \tau)^2} = \frac{1 - \cos^2 \tau}{(1 + \cos \tau)^2} = \frac{1 - \cos \tau}{1 + \cos \tau}$$

$$\therefore \cos \tau = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

$$\therefore y = \frac{\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right)}{1 + \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right)} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2) + (1 - x^2)}$$

$$\therefore y = \frac{1 - x^2}{2}$$

これは放物線である。
それは右図のとおり。



③

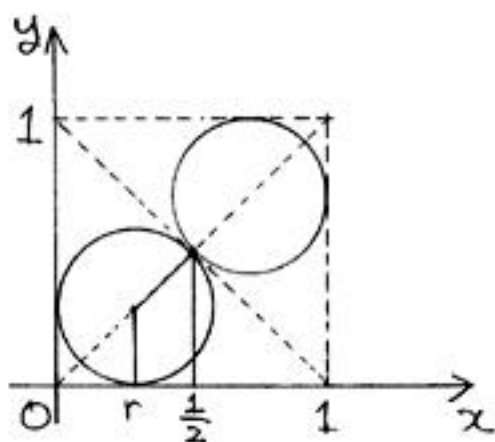
(1) 接するときは $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ で接

するから、半径は

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - r \right) = r$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

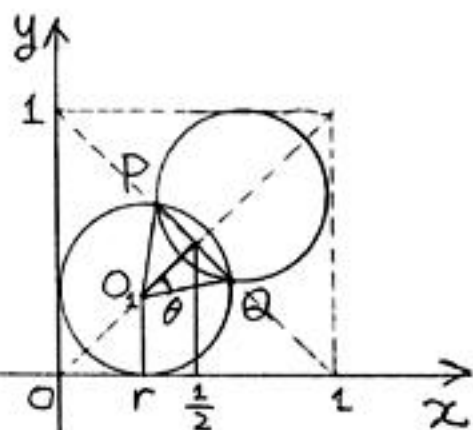


(2) PQの中点が $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ と

なるから、上と同様

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - r \right) = r \cos \theta$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2} + \cos \theta)}$$



面積は.

$$S = 2\pi r^2 - 2 \left(r^2 \theta - \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta \right)$$

$$= r^2 (2\pi - 2\theta + \sin 2\theta)$$

$$= \frac{2\pi - 2\theta + \sin 2\theta}{2(\sqrt{2} + \cos \theta)^2}$$

(3) Sを θ で微分すると

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-2 + 2\cos 2\theta)(\sqrt{2} + \cos \theta) - (2\pi - 2\theta + \sin 2\theta)2(-\sin \theta)}{(\sqrt{2} + \cos \theta)^3}$$

$$= \frac{-2\sin^2 \theta (\sqrt{2} + \cos \theta) + \sin \theta (2\pi - 2\theta + 2\sin \theta \cos \theta)}{(\sqrt{2} + \cos \theta)^3}$$

$$= \frac{2\sin \theta (\pi - \theta - \sqrt{2} \sin \theta)}{(\sqrt{2} + \cos \theta)^3}$$

これは $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ では $S' > 0$ である。したがって

Sは単調増加であり、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき最大になる。

$$\text{そのとき } r = \frac{1}{2}$$

4

(1) $y = \frac{e^x}{1+e^x}$ とおけるから

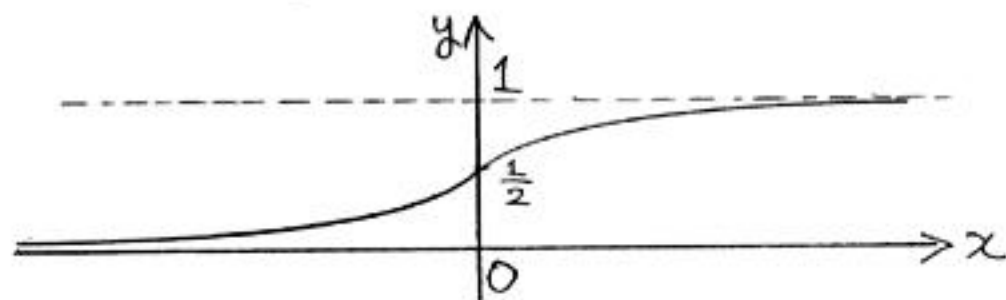
$$y' = \frac{e^x(1+e^x) - e^x e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

よって, $y' > 0$ だから, y は単調増加.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-x} + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 0$$

よって, $y=0$ と $y=1$ が漸近線. したがって図



$$\begin{aligned} (2) \quad g_a(r) &= \int_{-1}^r \left(\frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^{x-a}}{1+e^{x-a}} \right) dx \\ &= \left[\log(1+e^x) - \log(1+e^{x-a}) \right]_{-1}^r \\ &= \log(1+e^r) - \log(1+e^{r-a}) \\ &\quad - \log(1+e^{-1}) + \log(1+e^{-1-a}) \\ &= \log \frac{1+e^r}{1+e^{r-a}} - \log \frac{1+e^{-1}}{1+e^{-1-a}} \end{aligned}$$

$$= \log \frac{e^{-r} + 1}{e^{-r} + e^{-a}} - \log \frac{e + 1}{e + e^{-a}}$$

$$\therefore \lim_{r \rightarrow \infty} g_a(r) = \log \frac{1}{e^{-a}} - \log \frac{e+1}{e+e^{-a}}$$

$$= a - \log \frac{e+1}{e+e^{-a}} \quad \dots\dots\dots (\text{答})$$

$$(3) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{h(a)}{a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{a} \log \frac{e+1}{e+e^{-a}} \right) = 1 \dots\dots\dots (\text{答})$$