

1. (1) $u = \alpha + \beta$, $v = \alpha\beta$ とおけば. 与式は

$$\begin{cases} x+y = v+u-1 \\ 2x+3y = 3v+2u-3 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} u = x \\ v = y+1 \end{cases}$$

よって

$$\underline{u + \beta = x, \quad v = y + 1} \quad \#$$

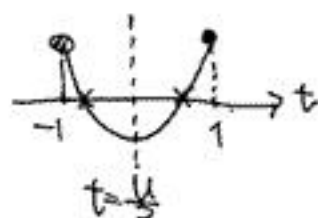
(2) $t^2 - ut + v = 0$ が実数解をもつ条件あり. 判別式 $D \geq 0$ が求める条件である.

$$\therefore D = u^2 - 4v \geq 0$$

おと (1) より

$$x^2 - 4(y+1) \geq 0 \quad \therefore \underline{y \leq \frac{x^2}{4} - 1} \quad \#$$

(3) $t^2 - ut + v = 0$ が $-1 \leq t \leq 1$ で 2 解をもつ条件を求めればよい. つまり グラフ $S = f(t) = t^2 - ut + v$ が 1 以下のようになっていればよい



$$\therefore \begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \\ -1 \leq \frac{u}{2} \leq 1 \\ D \geq 0 \end{cases}$$

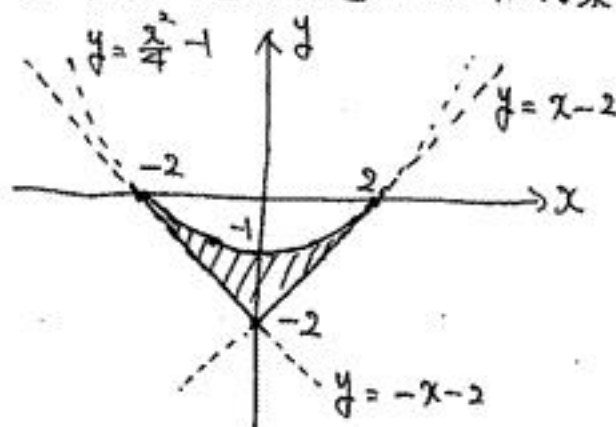
したがって求める条件は

$$\begin{cases} 1 + u + v \geq 0 \\ 1 - u + v \geq 0 \\ -2 \leq u \leq 2 \\ D \geq 0 \end{cases}$$

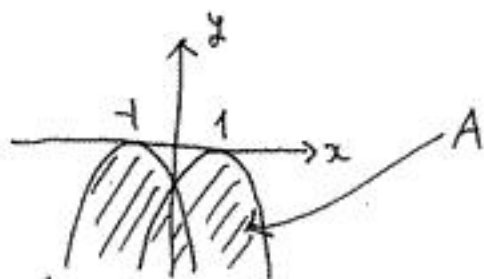
(1), (2) より

$$\begin{cases} y \geq -x - 2 \\ y \geq x - 2 \\ -2 \leq x \leq 2 \\ y \leq \frac{x^2}{4} - 1 \end{cases}$$

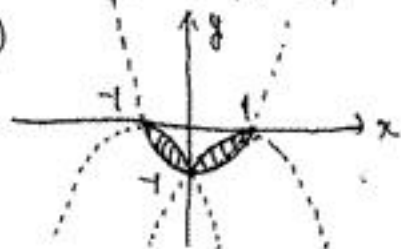
座標平面に図示すると 下図の斜線部 (境界を含む)



2.



(1)



$A \cap B$ は図のおこな。軸に関する対称性より、求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^1 \{-(x-1)^2 - (x^2-1)\} dx \\ &= -4 \int_0^1 x(x-1) dx \\ &= -4 \left[-\frac{1}{6}(1-0)^3 \right] \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(2) $y = -(x-0)^2$, $y = (x-a)^2 + b$ が共有点を持つばよい。

$$\therefore \begin{cases} y = -(x-0)^2 \\ y = (x-a)^2 + b \end{cases} \text{ より } 2x^2 - 2(a+1)x + a^2 + b + 1 = 0 \dots \textcircled{1}$$

が実数解をもてばよい

よて ①の判別式 $D_1 \geq 0$ より

$$D_1/4 = (a+1)^2 - 2(a^2 + b + 1) \geq 0 \quad \therefore b \leq -\frac{1}{2}(a-1)^2$$

(3) $A_1 \cap B$ が空でない または $A_2 \cap B$ が空でない 条件を求めばよい。

$$A_1 \cap B \text{ が空でない} \Leftrightarrow b \leq -\frac{1}{2}(a-1)^2 \quad (\textcircled{1}) \quad (2)$$

$A_2 \cap B$ が空でない条件は (2) と同様にして、

$$\begin{cases} y = -(x+1)^2 \\ y = (x-a)^2 + b \end{cases} \text{ より } 2x^2 - 2(a-1)x + a^2 + b + 1 = 0 \dots \textcircled{2}$$

が実数解をもてばよい。

よて ②の判別式 $D_2 \geq 0$ より

$$D_2/4 = (a-1)^2 - 2(a^2 + b + 1) \geq 0 \quad \therefore b \leq -\frac{1}{2}(a+1)^2$$

したがって 求める条件は

$$b \leq -\frac{1}{2}(a-1)^2 \quad \text{または} \quad b \leq -\frac{1}{2}(a+1)^2$$



となり、図の斜線部(境界含む)が求める領域である。

3. z は c 上で 偏角 θ あり $z = \cos\theta + i\sin\theta \dots ①$
 w は c' 上で $\angle 2\theta$ あり $w-1 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta \dots ②$
とがけ

(1) ②より $w = 1 + \cos 2\theta + i\sin 2\theta$ #

(2) $\operatorname{Re}(w) < \operatorname{Re}(z) \Leftrightarrow 1 + \cos 2\theta < \cos\theta$
 $\Leftrightarrow 2\cos^2\theta - \cos\theta < 0$
 $\Leftrightarrow \cos\theta(2\cos\theta - 1) < 0$
 $\Leftrightarrow 0 < \cos\theta < \frac{1}{2}$

ここで $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ あり

$60^\circ < \theta < 90^\circ$ #

が求まる θ の範囲である.

(3) $w - z = 1 + \cos 2\theta - \cos\theta + i(\sin 2\theta - \sin\theta)$
 $= \cos\theta(2\cos\theta - 1) + i\sin\theta(2\cos\theta - 1)$
より

$$|w - z| = \sqrt{\{\cos\theta(2\cos\theta - 1)\}^2 + \{\sin\theta(2\cos\theta - 1)\}^2}$$
$$= |2\cos\theta - 1|.$$

よって

$$|2\cos\theta - 1| = \sqrt{3} + 1 \quad \text{r.e.} \quad 2\cos\theta - 1 = \pm(\sqrt{3} + 1)$$

より

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}+2}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ところが $\frac{\sqrt{3}+2}{2} > 1$ あり

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = 150^\circ$$
 #