

1. (1) 上の点をXをとるとき、 $\vec{OX}$ は実数 p, q を用いて

$$\begin{aligned} \vec{OX} &= \vec{OA} + p\vec{AB} + q\vec{AC} \\ &= \begin{pmatrix} 6(1-p-q) \\ 6p \\ 6q \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

とかける。また、OHの方向ベクトル $\vec{h} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は $\vec{AB}, \vec{AC}$ と直交することから、

$$\vec{AB} \cdot \vec{h} = 0 \iff -6x + 6y = 0 \quad \therefore x = y$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{h} = 0 \iff -6x + 6z = 0 \quad \therefore x = z$$

$$\therefore x = y = z$$

したがって $\vec{OH} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とかける。Hは面上より

$$\begin{cases} s = 6(1-p-q) \\ s = 6p \\ s = 6q \end{cases} \quad \begin{aligned} s &= 2 \\ \therefore p &= q = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad \therefore \vec{OH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

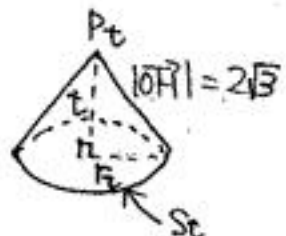
$|\vec{OH}| = 2\sqrt{3}$ より P_t の取り方より $0 < t < 2\sqrt{3}$.

よく上より求める。

$$H(2, 2, 2), \quad 0 < t < 2\sqrt{3} \quad \#$$

(2)

S_t の半径を r_t とおくと、



$$r_t = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - t^2} = \sqrt{12 - t^2}$$

$$\therefore f(t) = \frac{\pi}{3} r_t^2 \cdot t$$

$$= \frac{\pi}{3} (-t^3 + 12t) \quad \#$$

(3)

$$f'(t) = \frac{\pi}{3} (-3t^2 + 12)$$

$$= -\pi(t-2)(t+2)$$

より、 $f(t)$ の増減は、よく下のようにある

t	(0) ... 2 ... (2\sqrt{3})
$f'(t)$	+ 0 -
$f(t)$	↗ ↘

$\therefore f(t)$ は $t=2$ で最大値をとる

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{\pi}{3} (-8 + 24) \\ &= \frac{16}{3}\pi \end{aligned}$$

したがって $f(t)$ は $t=2$ で最大値 $\frac{16}{3}\pi$ をとる

— #

$$\begin{aligned} \boxed{2} (1) \quad P^2 &= \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-a)^2 + a^2 & a(1-a) + a(1-a) \\ a(1-a) + a(1-a) & a^2 + (1-a)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2a(1-a) & 2a(1-a) \\ 2a(1-a) & 1-2a(1-a) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より $\beta = 2a(1-a)$ とおくと $P^2 = \begin{pmatrix} 1-\beta & \beta \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$ とおけるので題意は示せる //

(2) $n=1$ のとき $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$ より成立.

n のとき成立を仮定すると.

$$\begin{aligned} P^{n+1} &= P^n P \\ &= \begin{pmatrix} 1-P_n & P_n \\ P_n & 1-P_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-P_n)(1-a) + aP_n & a(1-P_n) + P_n(1-a) \\ P_n(1-a) + a(1-P_n) & aP_n + (1-a)(1-P_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \{ (1-2a)P_n + a \} & (1-2a)P_n + a \\ (1-2a)P_n + a & 1 - \{ (1-2a)P_n + a \} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\therefore P_{n+1} = (1-2a)P_n + a$ とおくと $P^{n+1} = \begin{pmatrix} 1-P_{n+1} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & 1-P_{n+1} \end{pmatrix}$ とおける.

$n+1$ のときも成立する.

したがって帰納法により題意は示せる //

(3) (2) より

$$P_1 = a$$

$$P_{n+1} = (1-2a)P_n + a \quad \cdots \textcircled{1}$$

とあるので $\textcircled{1}$ は

$$P_{n+1} - \frac{1}{2} = (1-2a)\left(P_n - \frac{1}{2}\right)$$

とかけると

$$P_n - \frac{1}{2} = (1-2a)^{n-1} \left(P_1 - \frac{1}{2}\right) \therefore P_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-2a)^n$$

さらに $0 < a < 1$ より $-1 < 1-2a < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-2a)^n = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{2}$$

まとめると.

$$P_n = \frac{1}{2} [1 - (1-2a)^n] \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{2} \quad \#$$

$$\boxed{3} \text{ 仮定より } f(x) = \begin{cases} \sin x & (0 \leq x \leq \pi) \\ 0 & (x < 0, \pi \leq x) \end{cases}$$

$$f(x - \frac{\pi}{2}) = \begin{cases} \sin(x - \frac{\pi}{2}) (= -\cos x) & (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}) \\ 0 & (x < \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} < x) \end{cases}$$

と仮定.

$$(1) \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |f(x)|^2 dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} 0^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left[\frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |f(x - \frac{\pi}{2})|^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0^2 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x)^2 dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left[\frac{1}{4} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

まとめると.

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |f(x)|^2 dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |f(x - \frac{\pi}{2})|^2 dx = \frac{\pi}{2} \quad \#$$

$$(2) \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) f(x - \frac{\pi}{2}) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) f(x - \frac{\pi}{2}) dx$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) f(x - \frac{\pi}{2}) dx$$

$$+ \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) f(x - \frac{\pi}{2}) dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x (-\cos x) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \quad \#$$

$$(3) T(a) = 4a^2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |f(x)|^2 dx + 4 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) f(x - \frac{\pi}{2}) dx$$

$$+ \frac{1}{a^2} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |f(x - \frac{\pi}{2})|^2 dx$$

$$= 4a^2 \cdot \frac{\pi}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (\textcircled{1}, (1), (2))$$

$$= \frac{\pi}{2} (4a^2 + \frac{1}{a^2}) + 2$$

ここで $a > 0$ より 相加相乗平均から

$$4a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2\sqrt{4a^2 \cdot \frac{1}{a^2}} = 4$$

また、等号成立は

$$4a^2 = \frac{1}{a^2} \text{ より } a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\textcircled{2} a > 0)$$

よって

$$T(a) = \frac{\pi}{2} (4a^2 + \frac{1}{a^2}) + 2$$

$$\geq \frac{\pi}{2} \cdot 4 + 2 = 2\pi + 2 \quad (a = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき等号成立})$$

したがって

$$T(a) \text{ は } a = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき最小値 } 2\pi + 2 \text{ をとる}$$

#

[4] (1) 余事象を考えると

$$a_n = 1 - (1 \text{ の目が出ない}) \\ = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$(2) b_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$$

$$\therefore r = \frac{5}{6} \text{ とおくと: } \begin{cases} a_n = 1 - r^n \\ b_n = \frac{1}{6} r^{n-1} \end{cases}$$

$$\therefore M_n = \frac{1}{1-r^n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{6} r^{k-1}$$

一方 $x \neq 1$ に対して

$$1 + x + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

両辺 x で微分して

$$1 + x + 2x + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^n}{x-1} + \frac{1-x^n}{(x-1)^2}$$

よ)

$$M_n = \frac{1}{1-r^n} \cdot \frac{1}{6} \left[\frac{nr^n}{r-1} + \frac{1-r^n}{(r-1)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{6(r-1)^2} - \frac{1}{6(1-r)} \cdot \frac{nr^n}{1-r^n}$$

$$= 6 - \frac{n \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

$$(3) M_n = 6 - \frac{nr^n}{1-r^n} \text{ において } r = \frac{5}{6} \text{ より } |r| < 1.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$$

$$\text{また, } \lim_{n \rightarrow \infty} 1-r^n = 1 \text{ より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nr^n}{1-r^n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1-r^n} = \frac{0}{1} = 0$$

したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 6 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nr^n}{1-r^n} = 6$$