1. (1) H_1について、$y=-x^2+2x$ より $y'=-2x+2$

よって、lの傾きは$-2a+2$なのでlの方程式は

$$y=(-2a+2)(x-a)-a^2+2a$$

$\Leftrightarrow$ $\underline{y=2(1-a)x+a^2}$ ……(答)

lとH_2の交点のx座標について、次式が成立する。

$$x^2=2(1-a)x+a^2 \Leftrightarrow x^2+2(a-1)x-a^2=0 \cdots\cdots ①$$

①の判別式Dについて $\frac{D}{4}=(a-1)^2-1\cdot(-a^2)=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$ より

①は異なる2つの実数解を持つので、lはH_2と異なる2点で交わる。

(証明終)

(2) ①の解をα, βとおくと、解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-2(a-1),\quad \alpha\beta=-a^2$$

Qの座標は $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}\right)$

$$=(1-a, 3a^2-4a+2)$$

$x=1-a$, $y=3a^2-4a+2$ からaを消去して $\underline{y=3x^2-2x+1}$ ……(答)

(3) CとH_1の共有点のx座標について

$3x^2-2x+1=-x^2+2x \Leftrightarrow (2x-1)^2=0 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$ (重解)

より、CとH_1は$x=\frac{1}{2}$で接する。

ゆえに、求めるべき図形の面積(Sとおく)は、

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}\{(3x^2-2x+1)-(-x^2+2x)\}dx$$

$$=4\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx$$

$$=4\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$=\underline{\frac{1}{6}}$ ……(答)

2. (1) $\triangle OAB$について

$OA=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $OB=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$, $AB=\sqrt{(3-1)^2+\{1-(-1)\}^2}=2\sqrt{2}$

余弦定理より $\cos\theta=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2\cdot OA\cdot OB}=\dfrac{2+10-8}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}=\underline{\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$ (答)

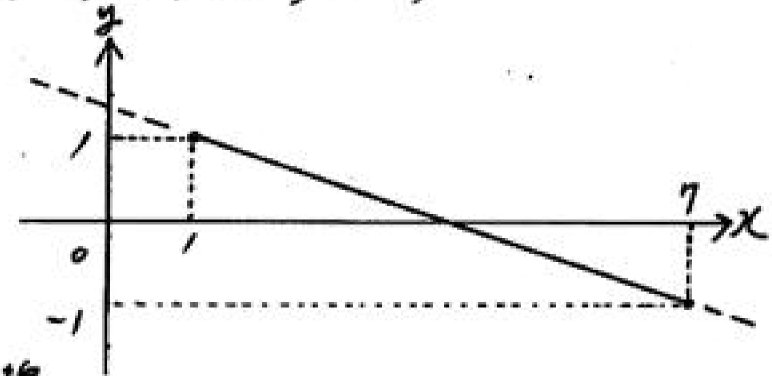
(2) $\overrightarrow{OP}=\vec{a}+t\vec{b}=(1,1)+t(3,-1)=(1+3t,\ 1-t)$

$0\leqq t\leqq 2$より Pの座標について

$1\leqq x\leqq 7$, $-1\leqq y\leqq 1$.

$\begin{cases} x=1+3t \\ y=1-t \end{cases}$ から tを消去して

$y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$



以上より、Pの動く範囲は右図の実線.

(3) $\overrightarrow{OQ}=s\vec{a}+t\vec{b}$

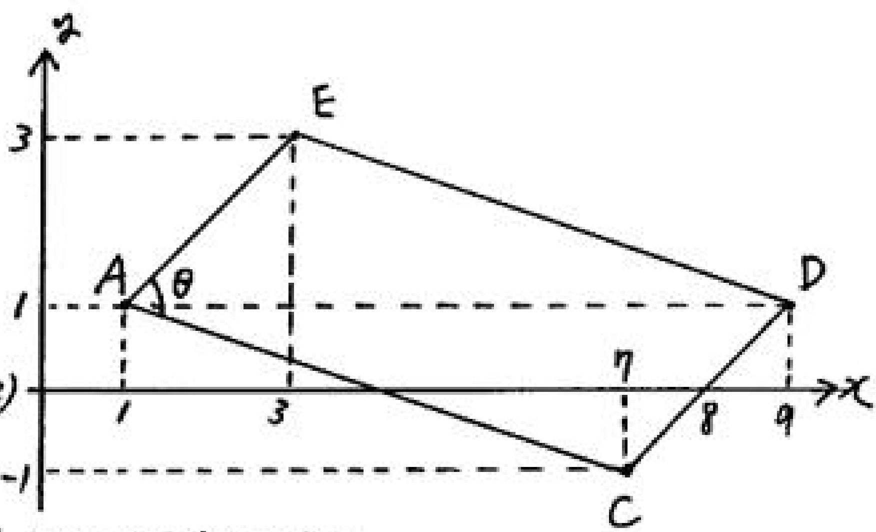
$=\vec{a}+\frac{s-1}{2}\cdot 2\vec{a}+\frac{t}{2}\cdot 2\vec{b}$

$1\leqq s\leqq 3$, $0\leqq t\leqq 2$より

$0\leqq\frac{s-1}{2}\leqq 1$, $0\leqq\frac{t}{2}\leqq 1$

$\vec{a}=(1,1)$, $2\vec{a}=(2,2)$, $2\vec{b}=(6,-2)$

より、点Qの動く範囲は右図



の平行四辺形ACDEの周および内部である

したがって、求めるべき面積(Sとおく)は、

$S=2\times\triangle ACE$

$=2\times\frac{1}{2}\times|2\vec{a}|\times|2\vec{b}|\times\sin\theta$

$=2\times\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{10}\times\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}$ $(\because \sin\theta>0)$

$=\underline{16}$ ……(答)

3. (1) $\angle A_1A_2A_3 = \frac{1}{6}\times(180^\circ\times 4) = 120^\circ$ より

$\triangle A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}A_1A_2\times A_2A_3\times\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\sqrt{3}}$ ……(答)

$\angle A_1A_3A_2 = \dfrac{180^\circ - \angle A_1A_2A_3}{2} = 30^\circ$, $\angle A_4A_3A_1 = 120^\circ - \angle A_1A_3A_2 = 90^\circ$ より

$\triangle A_1A_3A_4 = \frac{1}{2}\cdot A_3A_4\cdot A_1A_3 = \frac{1}{2}\cdot A_3A_4\cdot(2\cdot A_2A_3\cos 30^\circ) = \underline{2\sqrt{3}}$ ……(答)

$\triangle A_1A_3A_5$ は一辺 $A_1A_3 = 2A_2A_3\cos 30^\circ = 2\sqrt{3}$ の正三角形なので

$\triangle A_1A_3A_5 = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ = \underline{3\sqrt{3}}$ ……(答)

(2) さいころの目の出方は全部で 6^3 通り。そのうち三角形ができるのは出た目がすべて異なるときで ${}_6P_3 = 6\cdot 5\cdot 4$(通り)。ゆえに、三角形ができない確率は

$$1 - \frac{6\cdot 5\cdot 4}{6^3} = \underline{\frac{4}{9}} \text{ ……(答)}$$

(3) $\triangle A_1A_2A_3$ と合同な三角形ができるのは、さいころの目の組み合わせが $(1,2,3)$, $(2,3,4)$, $(3,4,5)$, $(4,5,6)$, $(5,6,1)$, $(6,1,2)$ になるときで、求めるべき確率は

$$\underbrace{\frac{{}_6P_3}{6^3}}_{\text{三角形ができる確率}} \times \underbrace{\frac{6}{{}_6C_3}}_{\text{できた三角形が}\triangle A_1A_2A_3\text{と合同となる確率}} = \underline{\frac{1}{6}} \text{ ……(答)}$$

(4) $\triangle A_1A_3A_5$ と合同な三角形ができるのは、さいころの目の組み合わせが $(1,3,5)$, $(2,4,6)$ になるときで、起こりうる確率は

$$\frac{{}_6P_3}{6^3}\times\frac{2}{{}_6C_3} = \frac{1}{18}$$

$\triangle A_1A_3A_4$ と合同な三角形ができる確率は

$$\frac{{}_6P_3}{6^3}\times\left\{1-\left(\frac{6}{{}_6C_3}+\frac{2}{{}_6C_3}\right)\right\} = \frac{2}{6}$$

したがって、求めるべき期待値は

$$\frac{1}{6}\times\triangle A_1A_2A_3 + \frac{1}{18}\times\triangle A_1A_3A_5 + \frac{2}{6}\times\triangle A_1A_3A_4 = \underline{\sqrt{3}} \text{ ……(答)}$$