$\boxed{1}$ (1) $x_{n+1}=x_n+2^n$ の両辺を $2^{n+1}(>0)$ で割ると

$$\frac{x_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x_n}{2^n}+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{x_n}{2^n}-1\right)$$

数列 $\left\{\frac{x_n}{2^n}-1\right\}$ は初項: $\frac{x_1}{2^1}-1=-\frac{1}{2}$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列なので

$$\frac{x_n}{2^n}-1=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2^n} \quad \therefore \underline{x_n=2^n-1} \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $$\frac{1}{y_{n+1}}=\frac{4}{y_n}+\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{y_{n+1}}+\frac{1}{4}=4\left(\frac{1}{y_n}+\frac{1}{4}\right)$$

数列 $\left\{\frac{1}{y_n}+\frac{1}{4}\right\}$ は初項: $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{4}=1$, 公比4の等比数列なので

$$\frac{1}{y_n}+\frac{1}{4}=1\cdot4^{n-1} \qquad \therefore y_n=\underline{\frac{4}{4^n-1}} \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $\vec{a_n}$ と $\vec{b_n}$ が垂直であることから

$$\vec{a_n}\cdot\vec{b_n}=0 \Leftrightarrow \left(16-\frac{1}{x_n}\right)\frac{x_n}{4}+\left(\frac{16}{x_n}-1\right)\frac{1}{y_n}=0$$

$$\Leftrightarrow 4x_n-\frac{1}{4}+\frac{16}{x_ny_n}-\frac{1}{y_n}=0$$

$$\Leftrightarrow 4(2^n-1)-\frac{1}{4}+\frac{16}{2^n-1}\cdot\frac{4^n-1}{4}-\frac{4^n-1}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow 4(2^n-1)-\frac{1}{4}+4(2^n+1)-\frac{2^{2n}-1}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow 2^n(2^n-32)=0$$

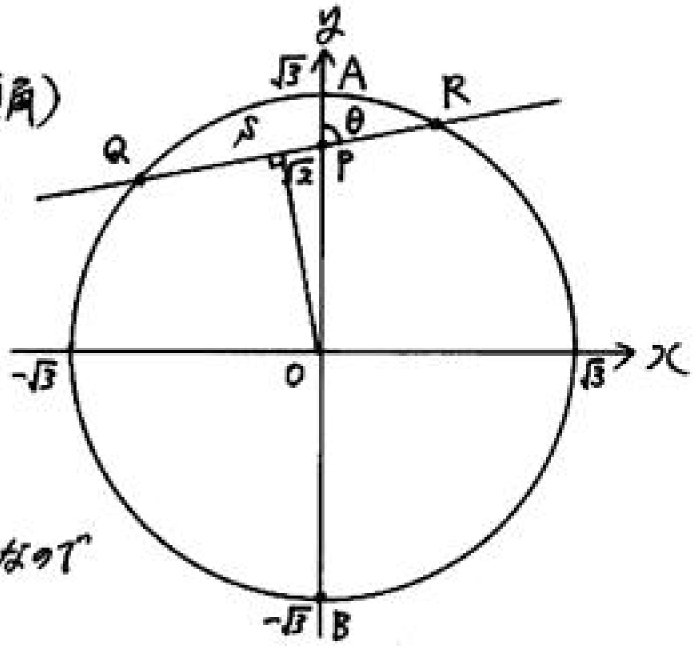
$2^n>0$ より $\qquad 2^n=32$

$$\therefore n=\underline{5} \cdots\cdots(\text{答})$$

2

(1) $\angle OPS = \angle APR = \theta$（∵対頂角）

より、$OS = OP\sin\theta = \underline{\sqrt{2}\sin\theta}$（答）



$\triangle RPO$について正弦定理より

$$\frac{OR}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{OP}{\sin\angle ORP}$$

$$\therefore \sin\angle ORP = \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\theta$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$より　$0<\angle ORP<\frac{\pi}{2}$なので

$\cos\angle ORP>0$.　したがって

$$QR = 2SR = 2\cdot OR\cdot\cos\angle ORP = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\theta\right)^2} = \underline{2\sqrt{3-2\sin^2\theta}}$$

（答）

(2) 点QとABとの距離は$QP\sin\theta$なので

$$T_1 = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot QP\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot QP\sin\theta = \sqrt{3}QP\sin\theta$$

同様に

$$T_2 = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot PR\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot PR\sin\theta = \sqrt{3}PR\sin\theta$$（証明終）

$$S(\theta) = T_1+T_2 = \sqrt{3}(QP+PR)\sin\theta = \sqrt{3}QR\sin\theta = \underline{2\sin\theta\sqrt{9-6\sin^2\theta}}$$

（答）

(3) $2\sin\theta\sqrt{9-6\sin^2\theta} > 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\theta\sqrt{9-6\sin^2\theta} > \sqrt{3}$

両辺正なので　$\sin^2\theta(9-6\sin^2\theta)>3$

$\Leftrightarrow 2\sin^4\theta-3\sin^2\theta+1<0$

$\Leftrightarrow (2\sin^2\theta-1)(\sin^2\theta-1)<0$

$\sin^2\theta-1<0$　（∵$0<\theta<\frac{\pi}{2}$より$0<\sin\theta<1$なので）より

$2\sin^2\theta-1>0 \Leftrightarrow \sin^2\theta>\frac{1}{2}$

$0<\sin\theta<1$より　$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\theta<1$.

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$より　$\underline{\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}}$ ……（答）

3 (1) 点Pにおける C の傾きは

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\theta}=\left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=\theta}=\left.\frac{\sin t}{2-\cos t}\right|_{t=\theta}=\frac{\sin\theta}{2-\cos\theta}$$

$0<\theta<\pi$ より $\sin\theta>0$ なので、直線 l_θ の方程式は

$$y=-\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}\{x-(2\theta-\sin\theta)\}+2-\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \underline{y=\frac{\cos\theta-2}{\sin\theta}x+\frac{4\theta-2\theta\cos\theta}{\sin\theta}} \quad \cdots\cdots(答)$$

(2) l_θ の式で $x=0$ とすると $y=\dfrac{4\theta-2\theta\cos\theta}{\sin\theta}$

$y=0$ とすると $x=2\theta$

$$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\times 2\theta\times\frac{4\theta-2\theta\cos\theta}{\sin\theta}=\underline{\frac{2\theta^2(2-\cos\theta)}{\sin\theta}} \quad \cdots\cdots(答)$$

(3) 曲線 C の式を $y=f(x)$ とすると

$$T(\theta)=\underbrace{\int_0^{2\theta-\sin\theta}f(x)\,dx}_{\text{点Pの左側の部分の面積}}+\underbrace{\frac{1}{2}\times\{2\theta-(2\theta-\sin\theta)\}\times(2-\cos\theta)}_{\text{点Pの右側の部分の面積}}$$

ここで $\dfrac{dx}{dt}=2-\cos t$ 　$\begin{array}{c|c} x & 0\to 2\theta-\sin\theta \\ \hline t & 0\to\theta \end{array}$ より

$$T(\theta)=\int_0^\theta(2-\cos t)(2-\cos t)\,dt+\frac{1}{2}\sin\theta(2-\cos\theta)$$

$$=\int_0^\theta(4-4\cos t+\cos^2 t)\,dt+\frac{1}{2}\sin\theta(2-\cos\theta)$$

$$=\int_0^\theta\left(\frac{9}{2}-4\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt+\frac{1}{2}\sin\theta(2-\cos\theta)$$

$$=\frac{9}{2}\theta-4\Big[\sin t\Big]_0^\theta+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^\theta+\frac{1}{2}\sin\theta(2-\cos\theta)$$

$$=\underline{\frac{9}{2}\theta-3\sin\theta} \quad \cdots\cdots(答)$$

(4)

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{T(\theta)}{S(\theta)}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\frac{9}{2}\theta-3\sin\theta}{\frac{2\theta^2(2-\cos\theta)}{\sin\theta}}=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{2-\cos\theta}\left\{\frac{9}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}-\frac{3}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\right\}=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}=\underline{\frac{3}{4}}$$

(答)

4 (1) $AX = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2 & a+2 \\ b-2 & b-1 \end{pmatrix}$

$XD = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & -2c \\ c & -2c \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2a+2 = 2c, & a+2 = -2c \\ b-2 = c, & b-1 = -2c \end{cases}$ より $a = -\frac{4}{3}, b = \frac{5}{3}, c = -\frac{1}{3}$ ……(答)

(2) $AX = XD$ の両辺に左から

$X^{-1} = \frac{1}{2\cdot1-1\cdot1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ をかけると

$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$(X^{-1}AX)^n = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & (\frac{2}{3})^n \end{pmatrix}$

ここで

$(X^{-1}AX)^n = (X^{-1}AX)(X^{-1}AX)\cdots\cdots(X^{-1}AX)$

$= X^{-1}A(XX^{-1})A(XX^{-1})\cdots\cdots(XX^{-1})AX$

$= X^{-1}A^nX$ より

$X^{-1}A^nX = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & (\frac{2}{3})^n \end{pmatrix}$

$\therefore \quad A^n = X\begin{pmatrix} (-\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & (\frac{2}{3})^n \end{pmatrix}X^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & (\frac{2}{3})^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{3^n}\begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} \end{pmatrix}$ ……(答)

4 (3) (2)より

$s_n = \frac{1}{3^n}\{2(-1)^n - 2^n\}, \quad u_n = \frac{1}{3^n}\{(-1)^n - 2^n\}$

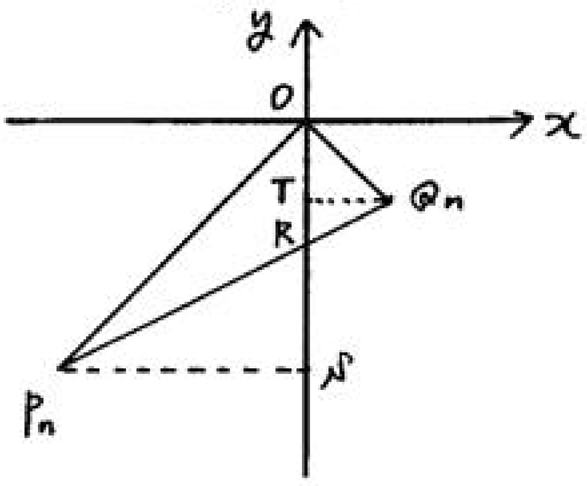
$t_n = \frac{1}{3^n}\{2(-1)^{n+1} + 2^{n+1}\}, \quad w_n = \frac{1}{3^n}\{(-1)^{n+1} + 2^{n+1}\}$

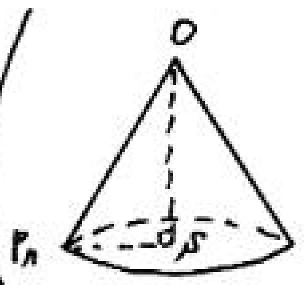
$x_n = s_n - u_n = \frac{1}{3^n}\{2(-1)^n - (-1)^n\} = (-\frac{1}{3})^n$

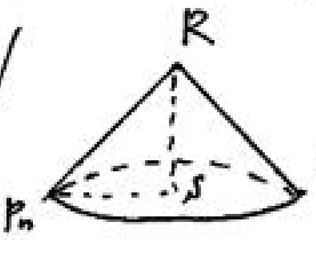
$y_n = t_n - w_n = \frac{1}{3^n}\{2(-1)^{n+1} - (-1)^{n+1}\} = -(-\frac{1}{3})^n$

よって P_n, Q_n の座標は $P_n\left((-\frac{1}{3})^n, (-\frac{1}{3})^n\right)$, $Q_n\left((-\frac{1}{3})^{n+1}, -(-\frac{1}{3})^{n+1}\right)$

nが奇数のときのP_nとQ_nの位置関係は右図のようになる。(nが偶数でも以下の議論は同じなのでV_nの式は同じになる。) P_nQ_nとy軸の交点をR, P_nからy軸に下ろした垂線の足をSとする。



V_n = (

の体積) − (

の体積)

$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot\frac{2}{3}$

$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3^{3n+1}}$

($\because$ 上のグラフで $\triangle RQ_nT \sim \triangle RP_nS$ (相似比 1:3)より $RS = \frac{3}{4}TS$. P_nとQ_nの座標から $TS = \frac{2}{3}OS$ なので)

したがって

$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{3n+1}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3^4}}{1-\frac{1}{3^3}} = \frac{\pi}{156}$ ……(答)