

# 平成 18 年度入学者選抜学力検査問題

(前期日程)

## 数 学

理	学	部
医	学	部
医	学	科
薬	学	部
工	学	部

(注 意)

- 1 問題紙は指示のあるまで開かないこと。
- 2 問題紙は本文 2 ページであり、答案用紙は 4 枚である。
- 3 答えはすべて答案用紙の指定欄に記入し、網かけの部分や裏面には記入しないこと。
- 4 問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

1 次の問いに答えよ。

(1) 条件  $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + 2^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) によって定められる数列  $\{x_n\}$  の一般項を求めよ。

(2) 条件  $y_1 = \frac{4}{3}, \frac{1}{y_{n+1}} = \frac{4}{y_n} + \frac{3}{4}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) によって定められる数列  $\{y_n\}$  の一般項を求めよ。

(3)  $\{x_n\}, \{y_n\}$  をそれぞれ (1), (2) の数列とする。

2つのベクトル  $\vec{a}_n = \left(16 - \frac{1}{x_n}, \frac{16}{x_n} - 1\right), \vec{b}_n = \left(\frac{x_n}{4}, \frac{1}{y_n}\right)$  が垂直であるときの正の整数  $n$  の値を求めよ。

2  $xy$  平面上の円  $C: x^2 + y^2 = 3$  上に2点  $A(0, \sqrt{3}), B(0, -\sqrt{3})$  がある。点  $P(0, \sqrt{2})$  を通る直線と円  $C$  の交点を  $Q, R$  とする。ただし、点  $R$  は第1象限にあり、 $\angle APR = \theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) とする。このとき、次の問いに答えよ。

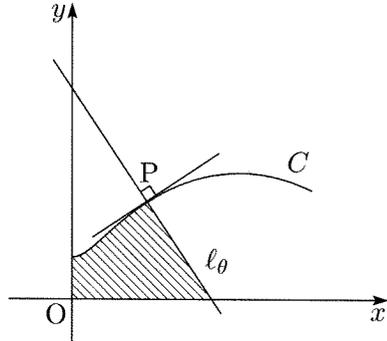
(1) 原点  $O$  から線分  $QR$  へ垂線をひき  $QR$  との交点を  $S$  とする。線分  $OS, QR$  の長さをそれぞれ  $\theta$  を用いて表せ。

(2)  $\triangle AQB$  と  $\triangle ABR$  の面積をそれぞれ  $T_1, T_2$  とする。 $T_1 = \sqrt{3}QP \sin \theta, T_2 = \sqrt{3}PR \sin \theta$  が成り立つことを示し、四角形  $AQBR$  の面積  $S(\theta)$  を求めよ。

(3) (2) の  $S(\theta)$  に対して、 $2\sqrt{3} < S(\theta)$  を満たす  $\theta$  の値の範囲を求めよ。

- 3  $xy$  平面上に媒介変数  $t$  で表された曲線  $C : x = 2t - \sin t, y = 2 - \cos t$  がある。 $t = \theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ) のときの点  $P(2\theta - \sin \theta, 2 - \cos \theta)$  における  $C$  の法線を  $l_\theta$  とする。 $l_\theta$  と  $x$  軸と  $y$  軸で囲まれた三角形の面積を  $S(\theta)$  とし、その三角形と曲線  $C$  の下側にある部分との共通部分 (図の斜線部) の面積を  $T(\theta)$  とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 直線  $l_\theta$  の方程式を求めよ。
- (2)  $S(\theta)$  を求めよ。
- (3)  $T(\theta)$  を求めよ。
- (4) 極限值  $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{T(\theta)}{S(\theta)}$  を求めよ。



- 4 定数  $a, b, c$  に対し、行列  $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & b \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -2c \end{pmatrix}$  が等式  $AX = XD$  を満たしている。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $a, b, c$  の値を求めよ。
- (2) 正の整数  $n$  に対し、 $A^n$  を求めよ。
- (3) (2) の  $A^n$  に対し、 $A^n = \begin{pmatrix} s_n & t_n \\ u_n & w_n \end{pmatrix}$ ,  $x_n = s_n - u_n$ ,  $y_n = t_n - w_n$  とおく。 $xy$  平面上の点  $P_n, Q_n$  を  $P_n(x_n, x_n)$ ,  $Q_n(x_{n+1}, y_{n+1})$  と定める。3つの直線  $OP_n, OQ_n, P_nQ_n$  で囲まれた部分を  $y$  軸の周りに1回転させてできる回転体の体積を  $V_n$  とする。  
このとき、無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$  の和を求めよ。