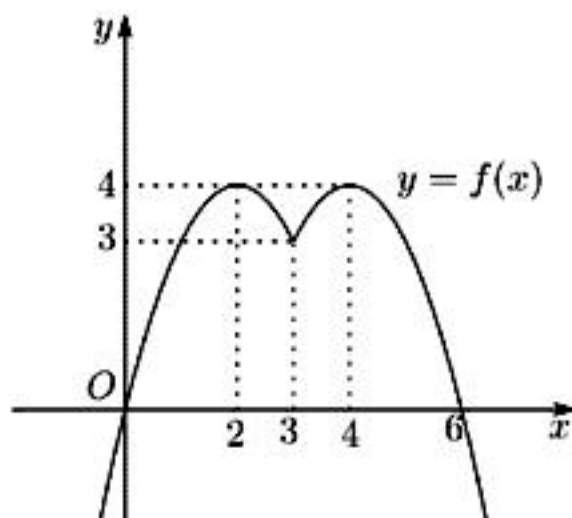


(1)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & (x \leq 3) \\ -x^2 + 8x - 12 & (x > 3) \end{cases}$$

より, グラフは右図のようになる.



(2) (1) より, 方程式

$$-x^2 + 6x + 2|x - 3| - 6 = ax$$

が相異なる 4 つの実数解を持てばよい. また, その 4 解は明らかに $x \leq 3$ に 2 解, $x > 3$ に 2 解と分かれる.

$$\begin{cases} x^2 + (a - 4)x = 0 & (x \leq 3) \quad \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + (a - 8)x + 12 = 0 & (x > 3) \quad \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

① の解は $x = 0, 4 - a$ なので, これらが $x \leq 3$ となる必要十分条件は $a \geq 1$ である. 一方, $x^2 + (a - 8)x + 12 = 0$ が $x > 3$ で異なる 2 つの実数解を持つ条件は

$$\begin{cases} (a - 8)^2 - 4 \cdot 12 > 0 \\ \frac{8 - a}{2} > 3 & (\text{軸の } x \text{ 座標}) \\ 9 + 3(a - 8) + 12 > 0 & (\text{左辺に } x = 3 \text{ を代入}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 8 - 4\sqrt{3}, 8 + 4\sqrt{3} < a \\ a < 2 \\ 1 < a \end{cases}$$

したがって, 与えられた条件を満たす a の範囲は

$$1 < a < 8 - 4\sqrt{3}$$

(3) (2) より, $y = \frac{3}{5}x$ は $y = f(x)$ と 4 点で交わることはない.

$$-x^2 + 8x - 12 = \frac{3}{5}x \quad \therefore x = 5 \quad (\because x > 3)$$

より, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^5 \left(-x^2 + 6x + 2|x - 3| - 6 - \frac{3}{5}x \right) dx \\ &= \int_0^3 \left(-x^2 + \frac{17}{5}x \right) dx + \int_3^5 \left(-x^2 + \frac{37}{5}x - 12 \right) dx \\ &= \frac{53}{6} \end{aligned}$$

2

(1)

$$S = \frac{1}{2} \sin \theta, \quad T = \frac{1}{2} \cos \theta, \quad \triangle OPA = \frac{1}{2} \sin \alpha, \quad |QR| = \sqrt{2}$$

なので、条件から、

$$\frac{1}{2}(\sin \theta + \cos \theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$$

$$\therefore \sin(\theta + 45^\circ) = \sin \alpha$$

ここで $15^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ と $\theta < \alpha < \theta + 90^\circ$ より

$$\alpha = \theta + 45^\circ, \quad 135^\circ - \theta$$

(i) $\alpha = \theta + 45^\circ$ のとき

$$0 < \alpha < \theta + 90^\circ \text{ より}$$

$$0 < \theta + 45^\circ < \theta + 90^\circ$$

すべての θ について成り立つ。

(ii) $\alpha = 135^\circ - \theta$ のとき

$$\theta < 135^\circ - \theta < \theta + 90^\circ$$

$$\frac{45^\circ}{2} < \theta < 45^\circ \leq 45^\circ$$

(i)(ii) より、

$$15^\circ \leq \theta \leq \frac{45^\circ}{2} \text{ のとき, } \alpha = \theta + 45^\circ$$

$$\frac{45^\circ}{2} < \theta \leq 45^\circ \text{ のとき, } \alpha = \theta + 45^\circ, 135^\circ - \theta$$

(2)

$$T - S = \frac{1}{2}(\cos \theta - \sin \theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\theta + 45^\circ)$$

となる。ここで $15^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ より $0 \leq T - S \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$ であり、最大値をとる θ の値は $\theta = 15^\circ$ 。

(3)

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

より、 $\theta = 15^\circ$ での S と T の値は

$$S = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}, \quad T = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{8}$$

また、3点 Q', O, Q はこの順に一直線に並ぶので

$$\triangle PQQ' = \triangle OPQ' + \triangle OPQ = \sin \theta$$

特に $\theta = 15^\circ$ のとき

$$\triangle PQQ' = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

である。

(1) $f(x) = x^2 - 7x + \frac{49}{4}$ とすると

$$f(1) = f(6) = \frac{25}{4}, \quad f(2) = f(5) = \frac{9}{4}, \quad f(3) = f(4) = \frac{1}{4}$$

より, 求める確率は

$$\frac{4+6+6+4}{36} = \frac{5}{9}$$

(2) 条件より, P, Q がともに D に含まれる k の値は $k = 2, 3, 4$ である.

また, 直線 PQ を表す方程式は

$$y = -2x + 3k + 1$$

である.

$k = 2, 3, 4$ のそれぞれについて, 放物線と直線の交点の座標と, 囲まれた部分の面積を求める.

i) $k = 2$ のとき

$$-2x + 7 = x^2 - 7x + \frac{49}{4} \quad \therefore x = \frac{3}{2}, \frac{7}{2}$$

より

$$S = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{7}{2}} \{-2x + 7 - f(x)\} dx = \frac{4}{3}$$

ii) $k = 3$ のとき

$$-2x + 10 = x^2 - 7x + \frac{49}{4} \quad \therefore x = \frac{1}{2}, \frac{9}{2}$$

より

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{9}{2}} \{-2x + 10 - f(x)\} dx = \frac{32}{3}$$

iii) $k = 4$ のとき

$$-2x + 13 = x^2 - 7x + \frac{49}{4} \quad \therefore x = \frac{5 \pm 2\sqrt{7}}{2}$$

より

$$S = \int_{\frac{5-2\sqrt{7}}{2}}^{\frac{5+2\sqrt{7}}{2}} \{-2x + 13 - f(x)\} dx = \frac{28\sqrt{7}}{3}$$

i)~iii) より, 得点の期待値は

$$\frac{1}{6} \left(\frac{4}{3} + \frac{32}{3} + \frac{28\sqrt{7}}{3} \right) = \frac{18 + 14\sqrt{7}}{9}$$