

1.

(1)  $f(x) = 0$  が  $x = \alpha$  を 2 重解として持つとする.  $\alpha \neq 0$  に注意する. このとき,  $f(x)$  は  $(x - \alpha)^2$  を因数として持つので,  $f(\alpha) = 0$  かつ  $f'(\alpha) = 0$  を満たす. これらを書き下せば,

$$\begin{cases} -\alpha^3 + 3a\alpha + 2b = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ -3\alpha^2 + 3a = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

である. このような  $\alpha$  が存在するためには,  $\textcircled{1}$  および  $\textcircled{1} - \textcircled{2} \times \alpha$ , つまり,

$$\begin{cases} a = \alpha^2 \\ b = \alpha^3 \end{cases}$$

が成立する必要がある. よって,  $a^3 = b^2$  である.

(2)

(i)  $l$  と  $C$  の接点を  $(p, p^{2/3})$  とする. この点での接線の傾きは  $\frac{2}{3}p^{-1/3}$  と書けるので,  $l$  の方程式は  $p$  を用いて,

$$\begin{aligned} y - p^{2/3} &= \frac{2}{3}p^{-1/3}(x - p) \\ y &= \frac{2}{3}p^{-1/3}x + \frac{1}{3}p^{2/3} \end{aligned}$$

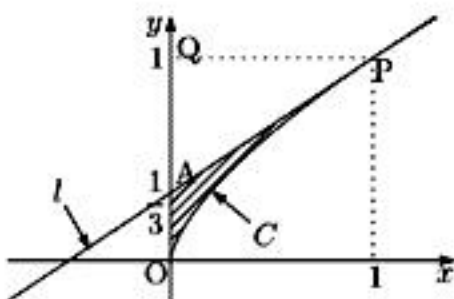
と書ける. 従って,

$$\begin{cases} m = \frac{2}{3}p^{-1/3} \\ \frac{1}{3} = p^{2/3} \end{cases}$$

なので,  $m = \frac{2}{3}$  であり, このとき  $p = 1$  なので, 接点の座標は  $(1, 1)$  である.

(ii) 右の図のように文字を設定する. 図形  $OPQ$  を  $y$  軸の周りに 1 回転させた立体の体積は,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \pi x^2 dy &= \int_0^1 \pi y^3 dy \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$



である.

一方  $\triangle APQ$  を  $y$  軸の周りに一回転させて得られる立体の体積は,

$$\pi \times 1^2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}\pi$$

である. 求める体積はこれらの差であるから,  $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{9}\pi = \frac{1}{36}\pi$  である.

2.

(1)  $xw = yz = k$  とおく.  $k \neq 0$  のとき,  $w = \frac{k}{x}$ ,  $z = \frac{k}{y}$  なので,  $\vec{v} = k \left( \frac{1}{y}, \frac{1}{x} \right) = \frac{k}{xy} (x, y)$  となり,  $\vec{u} \parallel \vec{v}$  である.

一方  $k = 0$  のときは,  $\vec{u}, \vec{v}$  はどちらもゼロベクトルではないので,  $x = z = 0$  か  $y = w = 0$  かのいずれかであり, いずれの場合も  $\vec{u} \parallel \vec{v}$  が成り立つ. 以上で結論を得る.

(2)  $X$  が逆行列を持たなければ,  $xw = yz$  が成立するので, (1) より,  $\alpha \neq 0$  なる実数  $\alpha$  が存在して,  $\vec{v} = \alpha \vec{u}$  と書ける. これを  $A\vec{v} = b\vec{v}$  に代入して,  $A\vec{u} = b\vec{u}$  を得る. 一方,  $A\vec{u} = a\vec{u}$  であるので, 辺々引いて  $(a-b)\vec{u} = \vec{0}$  を得る. 故に  $a=b$  である.

(3)(2) より,  $a \neq b$  ならば  $X$  は逆行列を持つ. 条件式より,

$$AX = X \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

である. 左から  $X^{-1}$  をかけて,

$$A = X \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} X^{-1}$$

を得る.  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$  の逆行列は  $\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$  なので,

$$B = X \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix} X^{-1}$$

とおけば,  $AB = BA = E$  なので,  $B$  は  $A$  の逆行列である. よって結論を得る.

3.  
 (1)  $\frac{s^2}{4} + t^2 = 1$  より,  
 $s = 2\sqrt{1-t^2}$  である. よって,  
 $QR = 2s = 4\sqrt{1-t^2}$  であり,

$$S(t) = 2(1-t)\sqrt{1-t^2} \\ = 2\sqrt{(1-t)^3(1+t)}$$

を得る. この式の根号の中身を  $f(t)$  とおけば,  $S(t)$  を最大にするためには,  $f(t)$  を最大にすることを考えればよいことになる.

$$f'(t) = -2(1-t)^2(1+2t)$$

であるので,  $f'(t) = 0$  とおくと,  $t = 1, -\frac{1}{2}$  である. よって, 増減表は以下のようになる.

|         |    |     |                |     |   |
|---------|----|-----|----------------|-----|---|
| $t$     | -1 | ... | $-\frac{1}{2}$ | ... | 1 |
| $f'(t)$ |    | +   | 0              | -   | 0 |
| $f(t)$  |    | /   | 極大             | \   |   |

従って,  $f(t)$  は  $t = -\frac{1}{2}$  のとき最大で, このときの最大値は  $S\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$  であり,  $R\left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$  を得る.

(2)  $l$  の方程式は  $\frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{2}y = 1$  となるから, 傾きは  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  である. よって,  $l$  に平行で,  $R$  から  $T$  へ向かう方向のベクトルとして,  $\vec{a} = (2, \sqrt{3})$  が取れる.

一方,  $\vec{RP} = \left(-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$  であるから,

$$\begin{aligned} \cos \angle PRT &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{RP}}{|\vec{a}| |\vec{RP}|} \\ &= \frac{-2\sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{7} \frac{\sqrt{21}}{2}} \\ &= -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

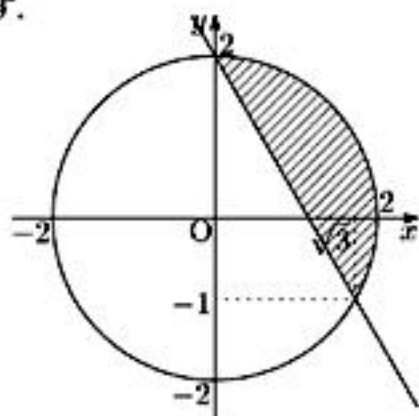
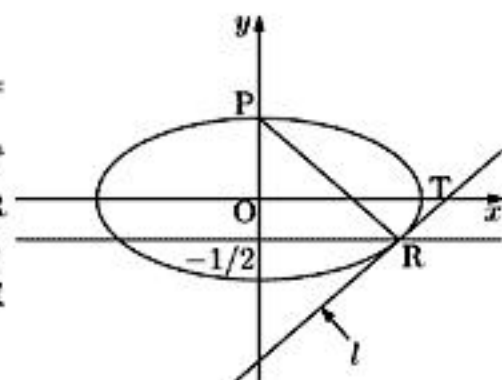
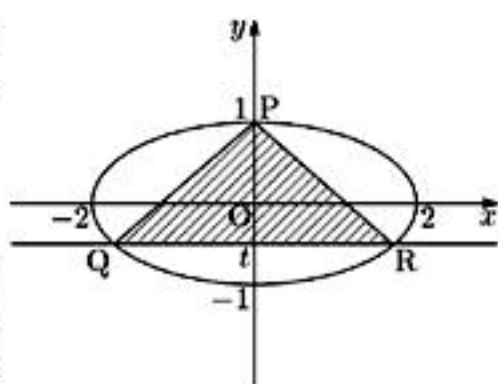
である.

(3) 今, 座標平面上の点  $(x, y)$  を  $(x, 2y)$  に移す変換を考える. この変換前の図形と変換後の図形の面積比は  $1:2$  であり, さらに  $C$  は原点を中心とする半径 2 の円に移る. またこの変換は直線を直線に移し,  $R$  を点  $(\sqrt{3}, -1)$  に,  $P$  を点  $(0, 2)$  に移す.

従って, 右図斜線部の面積の半分が求める面積であり,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left( 2^2 \times \pi \times \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \right) \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である.



4.

(1)  $k$  回目までで終了しない確率を  $Q_k$  とおく.  $k$  回目で終了しないためには, 任意の  $1 \leq j \leq k-1$  に対して,  $j$  番目と  $j+1$  番目のカードの和が 4 にならないことが必要十分である.  $j$  番目のカードが何であろうとも, この確率は  $\frac{4}{5}$  であるので,

$$Q_k = \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$$

となる.  $k$  回目で停止するのは,  $k-1$  番目と  $k$  番目のカードの和が初めて 4 になるときのなので,  $P_k = \frac{1}{5}Q_{k-1}$  を得る. 故に  $P_k = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{k-2}$  である. また,  $P_2 = \frac{1}{5}, P_3 = \frac{4}{25}, P_4 = \frac{16}{125}$  である.

(2) 対称性から,  $2 \leq k \leq n$  となる  $k$  に対し,  $k$  回目に 0, 1, 2, 3, 4 が出て終了する確率はそれぞれ  $\frac{1}{5}P_k$  である. 故に, 求める期待値は,

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{5} P_k (0+1+2+3+4) \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{2}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} \\ &= \frac{\frac{2}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right)}{1 - \frac{4}{5}} \\ &= 2 \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right) \end{aligned}$$

である. また,  $E_2 = \frac{2}{5}, E_3 = \frac{18}{25}$  である.

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 2$  である.  $E_n \geq 2 - \frac{1}{100}$  を変形すると,

$$2 \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{100}$$

$$\log_{10} 2 + (n-1)(\log_{10} 4 - \log_{10} 5) \leq -2$$

$$\begin{aligned} n-1 &\geq \frac{2 + \log_{10} 2}{\log_{10} 5 - \log_{10} 4} \\ &= \frac{2 + 0.3010}{1 - 0.3010 - 2 \times 0.3010} \\ &= 23.7 \dots \end{aligned}$$

なので, 最小の  $n$  は 25 である.