

(1)

$$\begin{aligned}
m(a) &= \int_0^1 f(x)g(x)dx \\
&= -\int_0^1 \left[2(a+1)x^2 + \left\{ \frac{1}{3}a(a+1) + 2 \right\}x + \frac{1}{3}a \right] dx \\
&= -\left[\frac{2}{3}(a+1)x^3 + \left\{ \frac{1}{6}a(a+1) + 1 \right\}x^2 + \frac{1}{3}ax \right]_0^1 \\
&= -\frac{2}{3}(a+1) - \frac{1}{6}a(a+1) - 1 - \frac{1}{3}a \\
&= -\frac{1}{6}(a+2)(a+5) \qquad \dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

となる。条件は、 $m(a) > 0$ であるから、 $\textcircled{1}$ より、

$$(a+2)(a+5) < 0$$

である。よって、求める範囲は、

$$-5 < a < -2$$

である。

(答) $-5 < a < -2$

(2)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)h(x)dx &= \int_0^1 f(x)\{g(x) - m(a)f(x)\}dx \\
&= \int_0^1 f(x)g(x)dx - m(a)\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx \\
&= m(a)\left[1 - \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx\right]
\end{aligned}$$

である。ここで(1)より、この範囲では $m(a) > 0$ であるから、条件は、

$$m(a)\left[1 - \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = 1 \qquad \dots \textcircled{2}$$

である。

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx &= \int_0^1 \{(a+1)^2 x^2 + 2(a+1)x + 1\} dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(a+1)^2 x^3 + (a+1)x^2 + x \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}(a+1)^2 + a + 2
\end{aligned}$$

より、 $\textcircled{2}$ から、

$$\frac{1}{3}(a+1)^2 + a + 2 = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 5a + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a+4) = 0$$

である。(1)の範囲を考慮して、

$$a = -4$$

である。

(答) $a = -4$

(1)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AO} \\
 &= t\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OA} \\
 &= t(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OA} \\
 &= t\overrightarrow{OP} + (1-t)\overrightarrow{OA}
 \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OP} + (1-t)\overrightarrow{OA}$$

(2)

$\overrightarrow{OA} = (0, 0, 1)$, $\overrightarrow{OP} = (x_0, y_0, z_0)$ であるので, (1)の結果に代入して,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OQ} &= t \cdot (x_0, y_0, z_0) + (1-t) \cdot (0, 0, 1) \\
 &= (tx_0, ty_0, tz_0 + 1 - t) \qquad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

である。点 Q は xy 平面上の点だから,

$$tz_0 + 1 - t = 0$$

であり, $P \neq A$ より $z_0 \neq 1$ であるので,

$$t = \frac{1}{1 - z_0} \qquad \dots \textcircled{2}$$

である。②を①に代入して t を消去すると,

$$\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{x_0}{1 - z_0}, \frac{y_0}{1 - z_0}, 0 \right)$$

である。

$$(答) \quad \overrightarrow{OQ} = \left(\frac{x_0}{1 - z_0}, \frac{y_0}{1 - z_0}, 0 \right)$$

(3)

条件より, $y_0 = \frac{1}{2}$ であるので, (2)で求めた $\overrightarrow{OQ}$ の x 成分を X , y 成分を Y とおけば,

$$\begin{cases} X = \frac{x_0}{1 - z_0} \\ Y = \frac{1}{2(1 - z_0)} \end{cases}$$

である。 $Y \neq 0$ であるので, これらより

$$\begin{cases} x_0 = \frac{X}{2Y} \\ y_0 = \frac{1}{2} \\ z_0 = 1 - \frac{1}{2Y} \end{cases}$$

である。 x_0, y_0, z_0 は $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$ を満たすので,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{X}{2Y} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2Y} \right)^2 &= 1 \\
 \Leftrightarrow X^2 + Y^2 - 4Y + 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow X^2 + (Y - 2)^2 &= 3
 \end{aligned}$$

である。これは $Y \neq 0$ を満たしている。よって, 点 Q は xy 平面上で, 点 $(0, 2)$ を中心とした, 半径 $\sqrt{3}$ の円を描く。

$$(答) \quad \text{点}(0, 2) \text{を中心とした, 半径}\sqrt{3} \text{の円}$$

(1)

$t = \sin \theta - \cos \theta$ の両辺を 2 乗して計算すると、

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1-t^2}{2}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} f(\theta) &= a \cdot \frac{1-t^2}{2} + bt - 1 \\ &= -\frac{1}{2}at^2 + bt + \frac{a-2}{2} \end{aligned}$$

であり、角の合成をして、

$$t = \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$$

である。ここで、 $0 \leq \theta \leq \pi$ より、

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$$

であるので、

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{2}}{2} &\leq \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \\ \Leftrightarrow -1 &\leq \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

である。よって、 t の範囲は、

$$-1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(\theta) = -\frac{1}{2}at^2 + bt + \frac{a-2}{2}, \quad -1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

(2)

$$g(t) = -\frac{1}{2}at^2 + bt + \frac{a-2}{2}$$

とおく。このとき、 $g(t) = 0$ を満たす t が $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ に存在するための (a, b) の条件を求めれば良い。問題文より $a > 0$ であることに注意すると、

$$g(t) = -\frac{1}{2}a \left(t - \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{(a-1)^2 + b^2 - 1}{2a}$$

と変形でき、このとき $g(t) = 0$ が $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ で解を持つための条件は、

$$[1] \quad g(-1)g(\sqrt{2}) \leq 0$$

$$[2] \quad \left[g(-1)g(\sqrt{2}) > 0 \right] \text{ かつ } \left[-1 \leq \text{軸}: t = \frac{b}{a} \leq \sqrt{2} \right] \text{ かつ } \left[g(-1)g\left(\frac{b}{a}\right) \leq 0 \right]$$

のいずれかである。

[1] のとき

$b > 0$ より $b+1 > 0$ であるから、

$$(b+1)(a-2\sqrt{2}b+2) \leq 0 \Leftrightarrow a-2\sqrt{2}b+2 \leq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。

[2] のとき

[1] のときと同様に、 $a > 0$ かつ $b+1 > 0$ であることに注意すると、

$$(b+1)(a-2\sqrt{2}b+2) > 0 \Leftrightarrow a-2\sqrt{2}b+2 > 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

かつ

$$-1 \leq \frac{b}{a} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -a \leq b \leq \sqrt{2}a \quad \cdots \textcircled{3}$$

かつ

$$\frac{(b+1)(a^2+b^2-2a)}{2a} \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 \geq 1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。

以上、①、②、③、④および $a, b > 0$ より、求める領域は下図の斜線部分となる。ただし、境界線は a 軸、 b 軸上は含まないがそれ以外は全て含む。

