

(1)

n に関する数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より、成立する。

[2] $n=k$ のとき

$$A_k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} + 3^{k-1} \\ 0 & 3^{k-1} \end{pmatrix}$$

が成立すると仮定して、 $n=k+1$ のときが成立することを示す。

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} A_k \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} + 3^{k-1} \\ 0 & 3^{k-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^k & 2^k + 3^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であることから、 A_{k+1} のときも成立する。

以上、[1], [2]より題意は示された。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} B_{n+1} - A_{n+1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} (B_n - A_n) - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow C &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} C &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow C &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3)

(1), (2)より,

$$B_n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} + 3^{n-1} + 1 \\ 1 & 3^{n-1} + 2 \end{pmatrix}$$

である。 B_n の行列式を考えると,

$$\begin{aligned} \Delta B_n &= 2^{n-1}(3^{n-1} + 2) - (2^{n-1} + 3^{n-1} + 1) \\ &= (2^{n-1} - 1)(3^{n-1} + 1) \geq 0 \end{aligned}$$

となり、等号成立は $n=1$ のときのみである。行列式が0であれば逆行列を持たないので、これらから逆行列が B_1 に限ることが示された。

(証明終)

(1)

$$f(x) = x(x-a)(x-2a)$$

とおくと、

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & (x \leq a, x \geq 2a) \\ -f(x) & (a \leq x \leq 2a) \end{cases}$$

である。

[1] $1 \leq a$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^1 f(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - ax^3 + a^2x^2 \right]_0^1 \\ &= a^2 - a + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。

[2] $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a f(x) dx - \int_a^1 f(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - ax^3 + a^2x^2 \right]_0^a - \left[\frac{1}{4}x^4 - ax^3 + a^2x^2 \right]_a^1 \\ &= \frac{1}{2}a^4 - a^2 + a - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。

[3] $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a f(x) dx - \int_a^{2a} f(x) dx + \int_{2a}^1 f(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - ax^3 + a^2x^2 \right]_0^a - \left[\frac{1}{4}x^4 - ax^3 + a^2x^2 \right]_a^{2a} + \left[\frac{1}{4}x^4 - ax^3 + a^2x^2 \right]_{2a}^1 \\ &= \frac{1}{2}a^4 + a^2 - a + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。

以上, [1], [2], [3]より,

$$S(a) = \begin{cases} a^2 - a + \frac{1}{4} & (1 \leq a) \\ \frac{1}{2}a^4 - a^2 + a - \frac{1}{4} & (\frac{1}{2} \leq a \leq 1) \\ \frac{1}{2}a^4 + a^2 - a + \frac{1}{4} & (0 \leq a \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

である。

$$(答) \quad S(a) = \begin{cases} a^2 - a + \frac{1}{4} & (1 \leq a) \\ \frac{1}{2}a^4 - a^2 + a - \frac{1}{4} & (\frac{1}{2} \leq a \leq 1) \\ \frac{1}{2}a^4 + a^2 - a + \frac{1}{4} & (0 \leq a \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

(2)

$0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$S(a) = \frac{1}{2}a^4 + a^2 - a + \frac{1}{4}$$

である。

$$S'(a) = 2a^3 + 2a - 1$$

$$S''(a) = 6a^2 + 2 > 0$$

であり, $S''(a) > 0$ であることから $S'(a)$ は単調増加する。また,

$$S'(0) \cdot S'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

であることから, $S'(a) = 0$ はこの範囲内に解を持ち, そこで $S(a)$ は極小値となる。よって最

大値は $a = 0, \frac{1}{2}$ のいずれかのときで,

$$S(0) = \frac{1}{4}$$

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$$

であるから, $S(a)$ は $a = 0$ のとき最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

(答) $\frac{1}{4}$

(1)

直線 ℓ と円 C の方程式を連立して解いた結果を用いて、

$$P\left(-\frac{2a}{a^2+1}, \frac{1-a^2}{a^2+1}\right)$$

となる。よって、円の接線の公式より、点 P における接線 m は、

$$\begin{aligned} -\frac{2a}{a^2+1}x + \frac{1-a^2}{a^2+1}y &= 1 \\ \Leftrightarrow -2ax + (1-a^2)y &= a^2+1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad -2ax + (1-a^2)y = a^2+1$$

(2)

ℓ , m の方程式に $y=-2$ を代入して x について解いた結果を用いて、

$$Q\left(-\frac{3}{a}, -2\right), R\left(\frac{a^2-3}{2a}, -2\right)$$

となる。 $a>0$ より、

$$\begin{aligned} QR &= \left| \frac{a^2-3}{2a} + \frac{3}{a} \right| \\ &= \frac{a^2+3}{2a} \\ &= \frac{1}{2} \left(a + \frac{3}{a} \right) \\ &\geq \sqrt{a \cdot \frac{3}{a}} \quad (\because \text{相加相乗平均の関係}) \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

であり、等号は $a=\sqrt{3}$ のときに成立する。よって、 $a=\sqrt{3}$ のとき、 QR の最小値は $\sqrt{3}$ である。

$$(\text{答}) \quad QR = \sqrt{3} \quad (a = \sqrt{3})$$

(3)

(2) のとき、 $A(0, 1)$, $Q(-\sqrt{3}, -2)$, $R(0, -2)$ であるので、

$$AQ = 2\sqrt{3}, AR = 3$$

となる。 $\angle QAR$ の二等分線が $y=-2$ と交わる点を S とすると、

$$QS:SR = 2\sqrt{3}:3$$

となる。よって、内分点の公式より、この点 S の座標は、

$$S(3\sqrt{3}-6, -2)$$

であり、求める直線は AS であるから、

$$y = (2+\sqrt{3})x+1$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = (2+\sqrt{3})x+1$$

(1)

$$y_n = \sqrt{x_n + n} - \sqrt{n}$$

とおく。条件より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ である。

$$x_n = y_n^2 + 2\sqrt{n}y_n$$

であるので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{y_n^2}{\sqrt{n}} + 2y_n \right) = 2a$$

である。よって題意は示された。

(証明終)

(2)

直線 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ のグラフの $x = m$ から $x = m+1$ までの面積を考えると、

$$\frac{1}{\sqrt{m+1}} < \int_m^{m+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \frac{1}{\sqrt{m}} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立する。

$$\int_m^{m+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{m+1} - \sqrt{m})$$

であるので、 $\textcircled{1}$ は、

$$\frac{1}{2\sqrt{m+1}} < \sqrt{m+1} - \sqrt{m} < \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

となる。ここで左側の不等式に対して、 $m = n$ から $m = L+n-1$ までの和をとると、

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \frac{1}{\sqrt{k+n}} < \sqrt{L+n} - \sqrt{n}$$

となり、右側の不等式に対して、 $m = n+1$ から $m = L+n$ までの和をとると、

$$\sqrt{L+n+1} - \sqrt{n+1} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \frac{1}{\sqrt{k+n}}$$

となる。これらから、

$$\sqrt{L+n+1} - \sqrt{n+1} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \frac{1}{\sqrt{k+n}} < \sqrt{L+n} - \sqrt{n}$$

が示された。

(証明終)

(3)

条件を L_n を用いて表すと、

$$\sum_{k=1}^{L_n} \frac{1}{\sqrt{k+n}} < b \leq \sum_{k=1}^{L_{n+1}} \frac{1}{\sqrt{k+n}}$$

となる。(2)の左側の不等式から、

$$\sqrt{L_n+n+1} - \sqrt{n+1} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L_n} \frac{1}{\sqrt{k+n}} < \frac{b}{2}$$

が成立し、(2)の右側の不等式から、

$$\frac{b}{2} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L_{n+1}} \frac{1}{\sqrt{k+n}} < \sqrt{L_{n+1}+n+1} - \sqrt{n}$$

となるので、

$$\frac{b}{2} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < \sqrt{L_n+n+1} - \sqrt{n+1}$$

が成立する。これらから、

$$\frac{b}{2} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < \sqrt{L_n+n+1} - \sqrt{n+1} < \frac{b}{2}$$

となり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

を考慮すれば、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{L_n+n+1} - \sqrt{n+1}) = \frac{b}{2}$$

となる。(1)より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{\sqrt{n+1}} = 2 \cdot \frac{b}{2} = b$ であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = b \cdot 1 = b$$

である。よって題意は示された。

(証明終)