

(1)

$$\begin{aligned}& \frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-2^{\frac{1}{3}} \\&= \frac{2}{3x^2}\left(x^3-3\cdot 2^{-\frac{2}{3}}x^2+1\right) \\&= \frac{2}{3x^2}\left(x-2^{\frac{1}{3}}\right)^2\left(x+2^{-\frac{2}{3}}\right) \geq 0 \quad (\because x>0)\end{aligned}$$

より,

$$\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{x^2}\right) \geq 2^{\frac{1}{3}}$$

が成立する。また, 等号成立は

$$x=2^{\frac{1}{3}}$$

のときである。

(証明終)

(2)

(i)

$a_n > 2^{\frac{1}{3}}$ のとき, (1)より

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}\left(a_n + \frac{1}{a_n^2}\right) > 2^{\frac{1}{3}}$$

となる。このとき

$$a_1 = 2 > 2^{\frac{1}{3}}$$

より帰納的にすべての自然数 n で

$$a_n > 2^{\frac{1}{3}}$$

が成り立つ。また

$$\begin{aligned}a_n - a_{n+1} &= a_n - \frac{2}{3}\left(a_n + \frac{1}{a_n^2}\right) \\&= \frac{1}{3}a_n - \frac{2}{3a_n^2} \\&= \frac{1}{3a_n^2}(a_n^3 - 2) \\&> \frac{1}{3a_n^2}\left\{\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 2\right\} = 0\end{aligned}$$

となるので, $n \geq 1$ で

$$a_n > a_{n+1} > 2^{\frac{1}{3}}$$

が成り立つ。

(証明終)

(ii)

$$\begin{aligned}& \frac{2}{3}\left(a_n - \frac{2}{a_{n-1}^2}\right) - \left(a_{n+1} - \frac{2}{a_n^2}\right) \\&= \frac{2}{3}\left(a_n + \frac{1}{a_n^2}\right) + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{a_n^2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{a_{n-1}^2} - a_{n+1} \\&= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_{n-1}^2}\right) \quad \left(\because a_{n+1} = \frac{2}{3}\left(a_n + \frac{1}{a_n^2}\right)\right) \\&> 0 \quad (\text{Q(ii)より } a_{n-1} > a_n)\end{aligned}$$

となるので, $n \geq 2$ のとき

$$a_{n+1} - \frac{2}{a_n^2} < \frac{2}{3}\left(a_n - \frac{2}{a_{n-1}^2}\right)$$

が成り立つ。

(証明終)

(iii)

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned}a_{n+1} - \frac{2}{a_n^2} &= \frac{2}{3}\left(a_n + \frac{1}{a_n^2}\right) - \frac{2}{a_n^2} \\&= \frac{2}{3}a_n - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{a_n^2} \\&= \frac{2}{3a_n^2}(a_n^3 - 2) \\&> \frac{2}{3a_n^2}\left\{\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 2\right\} = 0 \quad \left(\because a_n > 2^{\frac{1}{3}}\right)\end{aligned}$$

となる。また, $n \geq 2$ のとき(ii)より

$$\begin{aligned}a_{n+1} - \frac{2}{a_n^2} &< \frac{2}{3}\left(a_n - \frac{2}{a_{n-1}^2}\right) \\&< \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(a_{n-1} - \frac{2}{a_{n-2}^2}\right) \\&< \cdots < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(a_2 - \frac{2}{a_1^2}\right)\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}a_2 &= \frac{2}{3}\left(a_1 + \frac{1}{a_1^2}\right) \\&= \frac{2}{3}\left(2 + \frac{1}{2^2}\right) \\&= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

なので

$$a_2 - \frac{2}{a_1^2} = \frac{3}{2} - \frac{2}{2^2} = 1$$

となる。よって, $n \geq 2$ のとき

$$a_{n+1} - \frac{2}{a_n^2} < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

が成り立つ。また, $n=1$ のとき

$$a_2 - \frac{2}{a_1^2} = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

となる。したがって, $n \geq 1$ のとき

$$0 < a_{n+1} - \frac{2}{a_n^2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

が成り立つ。

(証明終)

(1)

$$\begin{aligned} 2\sin^2\theta\cos^2\theta &= \frac{1}{2}\sin^2 2\theta \\ &= \frac{1}{4}(1-\cos 4\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^4\theta + \cos^4\theta &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta \\ &= 1 - \frac{1}{4}(1-\cos 4\theta) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\theta \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より $-1 \leq \cos 4\theta \leq 1$ であるので、

$$0 \leq 2\sin^2\theta\cos^2\theta \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq \sin^4\theta + \cos^4\theta \leq 1$$

すなわち

$$2\sin^2\theta\cos^2\theta \leq \frac{1}{2} \leq \sin^4\theta + \cos^4\theta$$

が成り立つ。また、これら3つの値が等しくなる、すなわちすべて $\frac{1}{2}$ になるのは、

$$\cos 4\theta = -1$$

となるときで、このとき θ の値は

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

(2)

(i)

$$\begin{aligned} D(t) &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left\{\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^4\theta + \cos^4\theta) - \frac{1}{16}\right\} \\ &= t^2 - t + 2\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\ &= (t - 2\sin^2\theta\cos^2\theta)\left\{t - (\sin^4\theta + \cos^4\theta)\right\} \end{aligned}$$

である。ここで $\cos 4\theta \neq -1$ より

$$2\sin^2\theta\cos^2\theta < \sin^4\theta + \cos^4\theta$$

であるから、

$$\alpha = 2\sin^2\theta\cos^2\theta, \quad \beta = \sin^4\theta + \cos^4\theta$$

となり、このとき

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} D(t) dt &= -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= -\frac{1}{6}(\sin^4\theta + \cos^4\theta - 2\sin^2\theta\cos^2\theta)^3 \\ &= -\frac{1}{6}\left\{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2\right\}^3 \\ &= -\frac{(\cos^6 2\theta)}{6} \end{aligned}$$

となる。

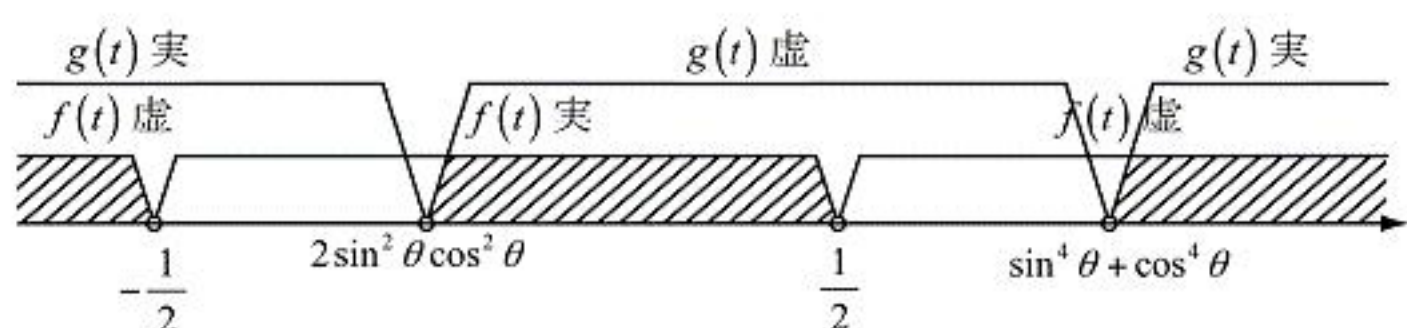
(証明終)

(ii)

2次方程式 $f(x) = 0$ の判別式を $D'(t)$ とおくと

$$\begin{aligned} D'(t) &= \frac{1}{4} - t^2 \\ &= -\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。このとき、 t の値による $f(t)$ と $g(t)$ の解の種類を数直線上に表わすと、以下の通りになる。



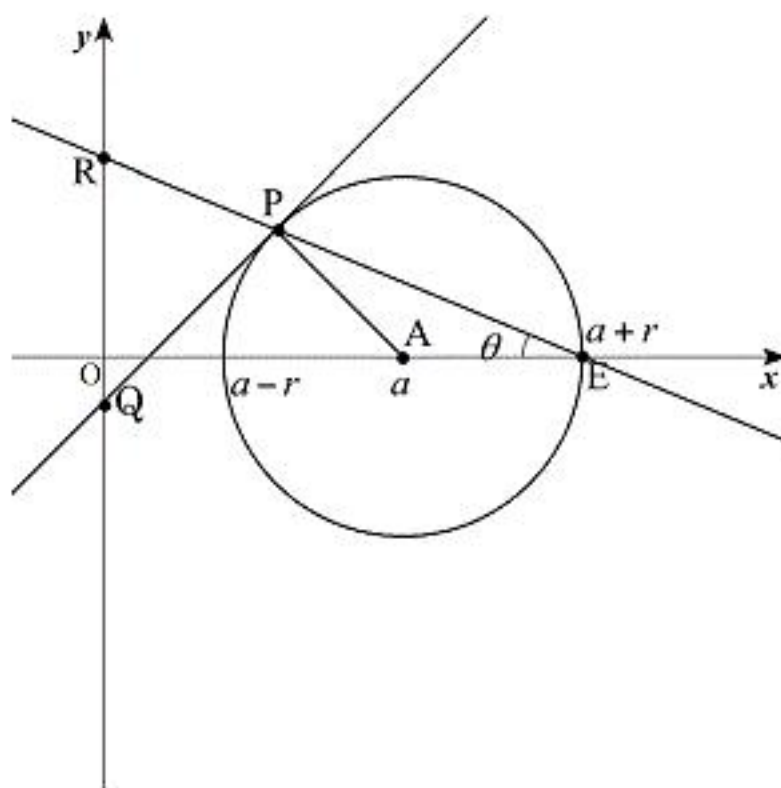
上の図より、求める t の範囲は

$$t < -\frac{1}{2}, \quad 2\sin^2\theta\cos^2\theta < t < \frac{1}{2}, \quad \sin^4\theta + \cos^4\theta < t$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t < -\frac{1}{2}, \quad 2\sin^2\theta\cos^2\theta < t < \frac{1}{2}, \quad \sin^4\theta + \cos^4\theta < t$$

(1)



$$\begin{aligned}\angle PRQ &= \pi - (\angle AEP + \angle EOR) \\ &= \pi - \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \theta\end{aligned}$$

であり

$$AE = AP = r$$

より△AEPは二等辺三角形である。よって

$$\angle APE = \angle AEP = \theta$$

となり、直線PQは円Cの接線なので、

$$\angle QPA = \frac{\pi}{2}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\angle QPR &= \pi - \angle QPE \\ &= \pi - (\angle QPA + \angle APE) \\ &= \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \theta\end{aligned}$$

となるので、

$$\angle PRQ = \angle QPR = \frac{\pi}{2} - \theta$$

より、△PQRは辺PRを底辺とする二等辺三角形である。これが正三角形になるためには

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

であればよい。

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

(2)

円周角と中心角の関係から

$$\angle OAP = 2\angle AEP = \frac{\pi}{3}$$

となる。よって

$$P\left(a - \frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$$

である。ここで点Pにおける円Cの接線は、Cの方程式が $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ であることより

$$\begin{aligned}&\left\{ \left(a - \frac{r}{2}\right) - a \right\} (x-a) + \frac{\sqrt{3}}{2}ry = r^2 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}r - \frac{\sqrt{3}}{3}a\end{aligned}$$

となる。よって

$$Q\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}r - \frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$$

である。 $\angle OEP = \angle OER = \frac{\pi}{6}$ より、点P, Rは原点とは一致しないので、1つの頂点が原点と

一致するならば、それは点Qである。このとき

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{3}}{3}r - \frac{\sqrt{3}}{3}a &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 2r\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = 2r$$

(3)

直線PEの方程式は

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}(a+r)$$

となるので、

$$R\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}(a+r)\right)$$

となる。ここで、△PQRの外接円の半径をRとおくと、正弦定理より

$$\begin{aligned}R &= \frac{QR}{2\sin\angle QPR} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}(a+r) - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r - \frac{\sqrt{3}}{3}a\right)}{2\sin\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}a - \frac{\sqrt{3}}{3}r}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{3}a - \frac{r}{3}\end{aligned}$$

となる。これがrと等しくなるとき

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}a - \frac{r}{3} &= r \\ \Leftrightarrow a &= 2r\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = 2r$$