

1

(1)

与えられた2つの関係式に、それぞれ $n=1$ を代入すると

$$x_1 = 4y_1 - \alpha, y_1 = 9x_1 - \beta$$

となる。これらを連立して解くと、

$$x_1 = \frac{1}{35}\alpha + \frac{4}{35}\beta, y_1 = \frac{9}{35}\alpha + \frac{1}{35}\beta$$

となる。

$$(答) \quad x_1 = \frac{1}{35}\alpha + \frac{4}{35}\beta, y_1 = \frac{9}{35}\alpha + \frac{1}{35}\beta$$

(2)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} x_k &= \sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} \\ &= 4y_n - \alpha + x_{n+1} \\ &= 4y_{n+1} - \alpha \end{aligned}$$

となるので

$$x_{n+1} - 4y_{n+1} = 4y_n \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} y_k &= \sum_{k=1}^n y_k + y_{n+1} \\ &= 9x_n - \beta + y_{n+1} \\ &= 9x_{n+1} - \beta \end{aligned}$$

となるので、

$$9x_{n+1} - y_{n+1} = 9x_n \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①、②を x_{n+1}, y_{n+1} について解くと、

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{35}(36x_n + 4y_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{35}(9x_n + 36y_n) \end{cases}$$

となる。したがって

$$A = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 36 & 4 \\ 9 & 36 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(答) \quad A = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 36 & 4 \\ 9 & 36 \end{pmatrix}$$

(3)

$$x_1 = \frac{14}{35} + \frac{4 \times (-21)}{35} = -2, y_1 = \frac{9 \times 14}{35} + \frac{-21}{35} = 3$$

より

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 36 & 4 \\ 9 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{7} \\ -\frac{18}{7} \end{pmatrix}$$

となる。ここで、 $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{6}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が成り立つと仮定する。この仮定が正しいことを n に関する数学的帰納法により証明する。

[1] $n=1$ のとき、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \left(\frac{6}{7}\right)^{1-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

より、成り立つ。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき、 $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \left(\frac{6}{7}\right)^{k-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 36 & 4 \\ 9 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{35} \left(\frac{6}{7}\right)^{k-1} \begin{pmatrix} 36 & 4 \\ 9 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{35} \left(\frac{6}{7}\right)^{k-1} \begin{pmatrix} -60 \\ 90 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{6}{7}\right)^k \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、 $n=k+1$ のときも成立する。

[1], [2]より、すべての自然数 n において

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。したがって、一般項は

$$x_n = -2 \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}, y_n = 3 \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$$

となる。

$$(答) \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{7} \\ -\frac{18}{7} \end{pmatrix}, x_n = -2 \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}, y_n = 3 \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$$

2

(1)

$s = -t$ とおくと, $ds = -dt$ より,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 f(t) dt &= \int_1^0 f(-s)(-ds) \\ &= \int_0^1 f(-s) ds \\ &= \int_0^1 f(s) ds \quad (\because f(-s) = f(s))\end{aligned}$$

となる。ここで, s を t と置き換えて

$$\int_{-1}^0 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$$

となる。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned}F(x) &= -\int_{-1}^x (x-t)f(t)dt - \int_x^1 (t-x)f(t)dt \\ &= -x\int_{-1}^x f(t)dt + \int_{-1}^x tf(t)dt - \int_x^1 tf(t)dt + x\int_x^1 f(t)dt\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}F'(x) &= -\int_{-1}^x f(t)dt - x\frac{d}{dx}\left(\int_{-1}^x f(t)dt\right) + \frac{d}{dx}\left(\int_{-1}^x tf(t)dt\right) \\ &\quad - \frac{d}{dx}\left(\int_x^1 tf(t)dt\right) + \int_x^1 f(t)dt + x\frac{d}{dx}\left(\int_x^1 f(t)dt\right) \\ &= -\int_{-1}^x f(t)dt - xf(x) + xf(x) + xf(x) + \int_x^1 f(t)dt - xf(x) \\ &= -\int_{-1}^x f(t)dt + \int_x^1 f(t)dt\end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned}F''(x) &= -\frac{d}{dx}\left(\int_{-1}^x f(t)dt\right) + \frac{d}{dx}\left(\int_x^1 f(t)dt\right) \\ &= -f(x) - f(x) \\ &= -2f(x)\end{aligned}$$

である。

(証明終)

(3)

$$g(0) = f(0) - f(0) \cdot 1 = 0$$

である。また

$$g'(x) = f'(x) + \sqrt{2}f(0)\sin\sqrt{2}x$$

より

$$g'(0) = f'(0) + \sqrt{2}f(0) \cdot 0 = f'(0)$$

となる。ここで, $f(x) = F(x)$ より

$$f'(x) = F'(x)$$

である。よって

$$\begin{aligned}f'(0) &= F'(0) \\ &= -\int_{-1}^0 f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt \\ &= 0 \quad (\because (1))\end{aligned}$$

となる。よって

$$g'(0) = f'(0) = 0$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2 + g(x)^2\right)' \\ &= \left(\frac{1}{2}\{f'(x) + \sqrt{2}f(0)\sin\sqrt{2}x\}^2 + \{f(x) - f(0)\cos\sqrt{2}x\}^2\right)' \\ &= \left(\frac{1}{2}\{f'(x)\}^2 + \sqrt{2}f(0)f'(x)\sin\sqrt{2}x + f(0)^2\sin^2\sqrt{2}x\right. \\ &\quad \left.+ f(x)^2 - 2f(0)f(x)\cos\sqrt{2}x + f(0)^2\cos^2\sqrt{2}x\right)' \\ &= \left(\frac{1}{2}\{f'(x)\}^2 + f(x)^2 + f(0)^2 + \sqrt{2}f(0)f'(x)\sin\sqrt{2}x - 2f(0)f(x)\cos\sqrt{2}x\right)' \\ &= f'(x)f''(x) + 2f'(x)f(x) + \sqrt{2}f(0)f''(0)\sin\sqrt{2}x + 2f(0)f'(0)\cos\sqrt{2}x \\ &\quad - 2f(0)f'(0)\cos\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}f(0)f(x)\sin\sqrt{2}x \\ &= -2f'(x)f(x) + 2f'(x)f(x) - 2\sqrt{2}f(0)f(x)\sin\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}f(0)f(x)\sin\sqrt{2}x \\ &= 0\end{aligned}$$

となるので,

$$\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2 + g(x)^2 = \text{定数}$$

であり

$$\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2 + g(x)^2 = \frac{1}{2}\{g'(0)\}^2 + g(0)^2 = 0$$

である。ここで, $\{g'(x)\}^2 \geq 0$ かつ $g(x)^2 \geq 0$ であるから,

$$g'(x) = g(x) = 0$$

となる。よって

$$f(x) - f(0)\cos\sqrt{2}x = 0$$

より

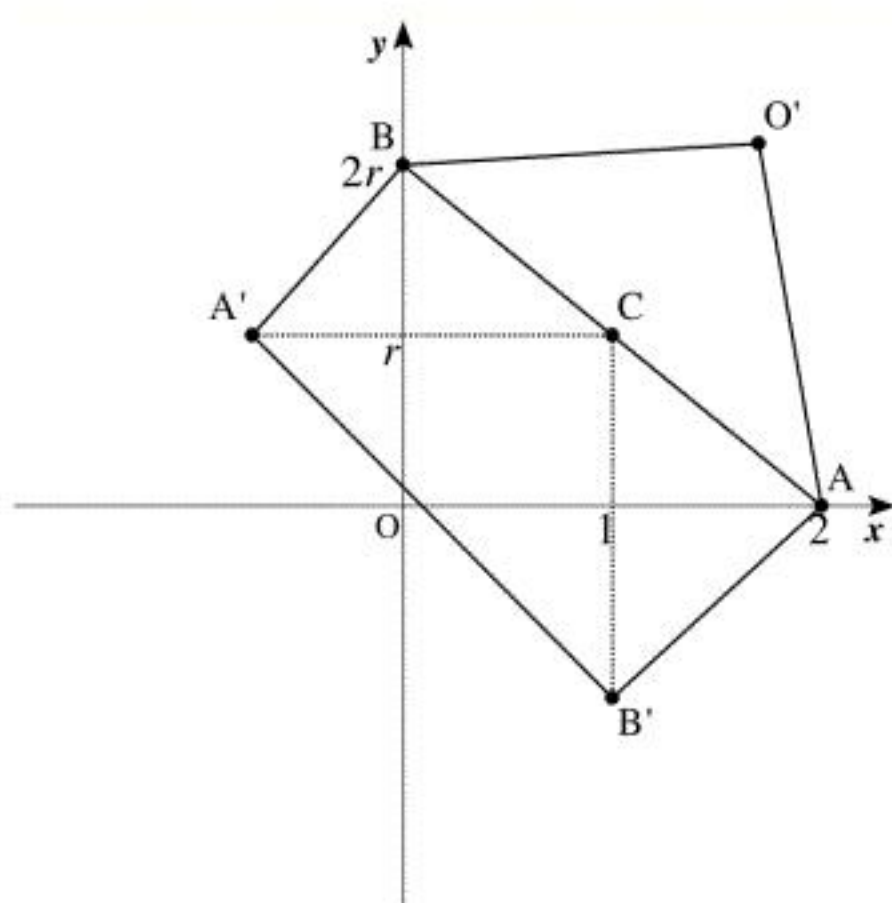
$$f(x) = f(0)\cos\sqrt{2}x$$

となる。

(証明終)

3

(1)



A' の y 座標は r なので、その x 座標は

$$-r \tan \angle A'OB' = -rt$$

となる。また、B' の x 座標は 1 であり

$$\triangle A'OB \sim \triangle B'OA$$

より、その y 座標は

$$-\tan \angle B'OA = -\tan \angle A'OB = -t$$

となる。したがって、A', B' の座標はそれぞれ

$$(-rt, r), (1, -t)$$

となる。

(答) $A'(-rt, r), B'(1, -t)$

(2)

直線 AA' は、その傾きは $\frac{-r}{rt+2}$ であるので、 c を定数として

$$rx + (rt+2)y = c$$

とおける。これは A(2, 0) を通るから

$$c = 2r$$

となる。よって直線 AA' の式は

$$rx + (rt+2)y = 2r$$

となる。一方、直線 BB' は、その傾きは $-(2r+t)$ であるので、 d を定数として

$$(2r+t)x + y = d$$

とおける。これは B(0, 2r) を通るから

$$d = 2r$$

となる。よって直線 BB' の式は

$$(2r+t)x + y = 2r$$

となる。

(答) 直線 AA' : $rx + (rt+2)y = 2r$, 直線 BB' : $(2r+t)x + y = 2r$

(3)

直線 AA', BB' の交点が M(x_0, y_0) であるから、

$$\begin{cases} rx_0 + (rt+2)y_0 = 2r \\ (2r+t)x_0 + y_0 = 2r \end{cases}$$

となる。2 式より

$$(r+t)x_0 = (rt+1)y_0$$

$$\therefore \frac{y_0}{x_0} = \frac{r+t}{rt+1}$$

となる。

(答) $\frac{y_0}{x_0} = \frac{r+t}{rt+1}$

(4)

線分 AB の中点を C とおくと、C(1, r) となる。このとき

$$\begin{aligned} CO' &= AC \tan \angle O'AB \\ &= AC \cdot t \\ &= t\sqrt{1+r^2} \end{aligned}$$

となり

$$CO' \perp AB, \overrightarrow{AB} = (-2, 2r)$$

より

$$\overrightarrow{CO'} = (rt, t)$$

となる。よって

$$O'(rt+1, r+t)$$

となり、このとき直線 OO' の方程式は

$$y = \frac{r+t}{rt+1}x$$

となる。(3)の結果より、点 M は OO' 上にあり、したがって題意が示された。

(証明終)

(1)

条件より

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$p_3 = 2 \times \left(\frac{4}{6} \times \frac{2}{6}\right) \times \frac{2}{6} = \frac{4}{27}$$

$$p_4 = 3 \times \left(\frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6}\right) \times \frac{2}{6} + 3 \times \left\{\left(\frac{2}{6}\right) \times \frac{2}{6}\right\} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

となる。 n 回目でBが勝つには、 $(n-1)$ 回目までに1または3の目が0回か1回だけ、2または4の目が1回だけ、それ以外は5または6の目が出て、さらに n 回目に2または4の目が出る場合であるから、

$$\begin{aligned} p_n &= {}_{n-1}P_2 \times \left\{ \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \left(\frac{2}{6}\right)^{n-3} \right\} \times \frac{2}{6} + (n-1) \times \left\{ \frac{2}{6} \times \left(\frac{2}{6}\right)^{n-2} \right\} \times \left(\frac{2}{6}\right)^{n-3} \\ &= \frac{(n-1)^2}{3^n} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{(n-1)^2}{3^n}$$

(2)

$$\begin{aligned} q_n &= 9p_{n+2} - 6p_{n+1} + p_n \\ &= \frac{(n+1)^2}{3^n} - \frac{2n^2}{3^n} + \frac{(n-1)^2}{3^n} \\ &= \frac{2}{3^n} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k q_n &= \sum_{n=1}^k \frac{2}{3^n} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k \right\}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k \end{aligned}$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k q_n &= 9 \sum_{n=1}^k p_{n+2} - 6 \sum_{n=1}^k p_{n+1} + \sum_{n=1}^k p_n \\ &= 9p_{k+2} + 9p_{k+1} - 9p_1 - 9p_2 - 6p_{k+1} + 6p_1 + 4 \sum_{n=1}^k p_n \\ &= \frac{(k+1)^2}{3^k} + \frac{3k^2}{3^k} - 1 - \frac{2k^2}{3^k} + 4 \sum_{n=1}^k p_n \\ &= \frac{2k^2 + 2k + 1}{3^k} - 1 + 4 \sum_{n=1}^k p_n \end{aligned}$$

となるので、

$$\sum_{n=1}^k p_n = \frac{1}{2} - \frac{k^2 + k + 1}{2 \cdot 3^k}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{n=1}^k q_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k, \quad \sum_{n=1}^k p_n = \frac{1}{2} - \frac{k^2 + k + 1}{2 \cdot 3^k}$$

(3)

$$\begin{aligned} a &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k p_n \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{k^2 + k + 1}{2 \cdot 3^k} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2}{3^k} - \frac{1}{2k} \cdot \frac{k^2}{3^k} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるので、このとき

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \left| \sum_{n=1}^k p_n - a \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \left| \frac{1}{2} - \frac{k^2 + k + 1}{2 \cdot 3^k} - \frac{1}{2} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \left(\frac{k^2 + k + 1}{2 \cdot 3^k} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log k}{k} + \frac{\log \left(k + 1 + \frac{1}{k} \right)}{k + 1 + \frac{1}{k}} \cdot \frac{k + 1 + \frac{1}{k}}{k} - \frac{\log 2}{k} - \frac{\log 3^k}{k} \right\} \\ &= -\log 3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\log 3$$