1

(1)

$x>0$ かつ $x\neq 1$ より，真数・底の条件は満たされている。

$$
\begin{aligned}
&\log_2 x+2\log_x 2=3\\
&\Leftrightarrow \log_2 x+\frac{2}{\log_2 x}=3\\
&\Leftrightarrow (\log_2 x)^2-3\log_2 x+2=0\\
&\Leftrightarrow (\log_2 x-2)(\log_2 x-1)=0\\
&\Leftrightarrow \log_2 x=1,\ 2\\
&\Leftrightarrow x=2,\ 4
\end{aligned}
$$

これらはともに，$x>0$ かつ $x\neq 1$ を満たしている。

(答)　$x=2,\ 4$

(2)

$x>0$，$x\neq 2$，$y>0$ より，真数・底の条件は満たされている。

$$
\begin{cases}
\log_{\frac{x}{2}} y=2\\
xy=16
\end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{cases}
y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 & \cdots ①\\
xy=16 & \cdots ②
\end{cases}
$$

より，①を②に代入して，

$$
\begin{aligned}
&x\cdot\frac{x^2}{4}=16\\
&\Leftrightarrow x^3=4^3\\
&\Leftrightarrow x=4
\end{aligned}
$$

である。これより，

$$(x,\ y)=(4,\ 4)$$

であり，これは $x>0$，$x\neq 2$，$y>0$ を満たす。

(答)　$(x,\ y)=(4,\ 4)$

(3)

[1]　$0<\dfrac{x}{2}<1$　$(0<x<2)$ のとき

$$
\begin{cases}
\log_{\frac{x}{2}} y<\log_{\frac{x}{2}}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\\
xy<16
\end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{cases}
y>\dfrac{1}{4}x^2\\
y<\dfrac{16}{x}
\end{cases}
$$

である。

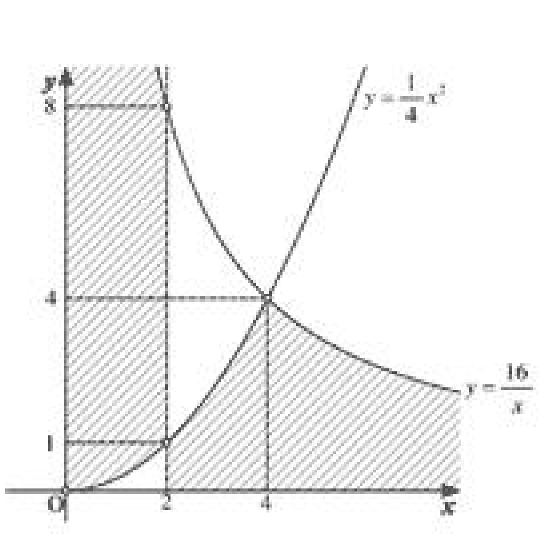
[2]　$\dfrac{x}{2}>1$　$(x>2)$ のとき

$$
\begin{cases}
\log_{\frac{x}{2}} y<\log_{\frac{x}{2}}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\\
xy<16
\end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{cases}
y<\dfrac{1}{4}x^2\\
y<\dfrac{16}{x}
\end{cases}
$$

である。

$y>0$ の条件と共に，[1], [2]を図示すると，下図の斜線部分となる。この領域上の $(x,\ y)$ は全て，連立方程式の真数・底の条件を満たしている。ただし，境界線は全て含まない。



2

(1)

$y=x^2$ 上の点 (t, t^2) での接線は，$y'=2x$ より，

$$y=2t(x-t)+t^2$$
$$=2tx-t^2 \qquad \cdots ①$$

である。このうち C_2 と接するものは，①と C_2 の方程式を連立させた，

$$(x-2)^2+4a=2tx-t^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-2(t+2)x+4a+4+t^2=0$$

が重解を持つ。その条件は，この 2 次方程式の判別式を D と置くと，

$$\frac{D}{4}=(t+2)^2-(4a+4+t^2)$$
$$=4t-4a$$
$$=0$$

より，

$$t=a$$

である。よって，直線 ℓ の方程式は，

$$y=2ax-a^2$$

である。

(答) 点 Q における接線 $y=2tx-t^2$
ℓ の方程式 $y=2ax-a^2$

(2)

C_1 と C_2 を連立して，

$$x^2=(x-2)^2+4a$$
$$\Leftrightarrow x=a+1$$

である。これより，

$$\mathrm{P}\left(a+1, (a+1)^2\right), \ \mathrm{R}\left(a+1, a^2+2a\right)$$

であり，これより，

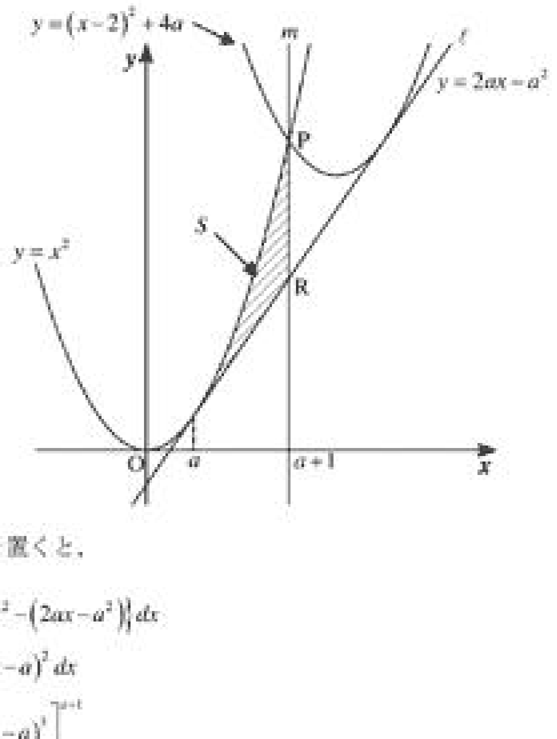
$$\mathrm{PR}=(a+1)^2-(a^2+2a)$$
$$=1$$

である。

(答) 1

(3)

下図の斜線部分の面積が求める面積である。



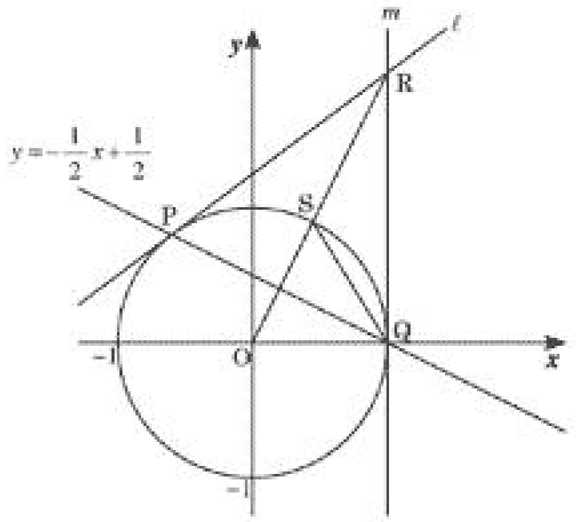
求める面積を S と置くと，

$$S=\int_a^{a+1}\left\{x^2-(2ax-a^2)\right\}dx$$
$$=\int_a^{a+1}(x-a)^2\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_a^{a+1}$$
$$=\frac{1}{3}$$

である。

(答) $\frac{1}{3}$

3



(1)

$x^2+y^2=1$ と $x+2y=1$ を連立して，

$$x^2+\left(\frac{1-x}{2}\right)^2=1$$
$$\Leftrightarrow 5x^2-2x-3=0$$
$$\Leftrightarrow (5x+3)(x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow x=1,\ -\frac{3}{5}$$

を得る。これより，

$$\mathrm{P}\left(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right),\ \mathrm{Q}(1,0)$$

であり，さらに，$\ell : -\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=1$ と $m : x=1$ を連立して，

$$\mathrm{R}(1,2)$$

である。

(答)　$\mathrm{P}\left(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$，$\mathrm{Q}(1,0)$，$\mathrm{R}(1,2)$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$$

より，

$$\mathrm{S}\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

である。また，△QRS の面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

である。

(答)　$\mathrm{S}\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$，△QRS の面積：$1-\frac{1}{\sqrt{5}}$

(3)

斜辺と他の1辺の長さが各々等しい直角三角形であるから，

$$\triangle \mathrm{OQR} \equiv \triangle \mathrm{OPR}$$

である。よって，∠QOR = ∠POR であり，QS = PS であることが分かる。すなわち，△PQS は PS = QS の二等辺三角形である。ゆえに，∠QPS = ∠PQS（・・・①）が成り立つ。

一方，接弦定理より，∠RQS = ∠QPS が成り立ち，これと①より

$$\angle \mathrm{RQS} = \angle \mathrm{PQS}$$

が示された。

(証明終)