1

(1)

点 $P(a, b)$ は，円 $x^2+y^2=1$ 上の点より，

$$a^2+b^2=1 \quad \cdots ①$$

を満たす。さらに，

$$\ell : ax+by=1$$

であるから，点 R と ℓ との距離が 2 であることは次のように書ける。

$$\frac{|4a-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$$

$$\Leftrightarrow |4a-1|=2 \quad (\because ①)$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}$$

$b>0$ に注意して，

$$P\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right) \text{ または } P\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$

である。

(答) $P\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ または $P\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

(2)

[1] $P\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ のとき

$$\ell : \frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{7}}{4}y=1$$

であるから，

$$Q\left(\frac{4}{3}, 0\right)$$

である。よって，

$$\triangle PQR \text{ の面積} = \frac{1}{2}\cdot\left(4-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

である。

[2] $P\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ のとき

$$\ell : -\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{15}}{4}y=1$$

であるから，

$$Q(-4, 0)$$

である。よって，

$$\triangle PQR \text{ の面積} = \frac{1}{2}\cdot(4+4)\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$=\sqrt{15}$$

である。

(答) $\triangle PQR \text{ の面積} = \begin{cases} \frac{\sqrt{7}}{3} & \left(a=\frac{3}{4},\ b=\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \\ \sqrt{15} & \left(a=-\frac{1}{4},\ b=\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \end{cases}$

$\boxed{2}$

(1)

球面の方程式に, $B\left(\sqrt{5},\sqrt{5},a\right)$ を代入する。

$$\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2+(a-a)^2=r^2 \Leftrightarrow r=\sqrt{10} \qquad (\because r>0)$$

であり, 球面の方程式は,

$$x^2+y^2+(z-a)^2=10$$

となる。これに座標 $(1,0,-1)$ を代入して,

$$1^2+0^2+(-1-a)^2=10$$
$$\Leftrightarrow (a+1)^2=9$$
$$\Leftrightarrow a=2,-4$$

を得る。$a>0$ であるから,

$$a=2$$

である。

(答) $r=\sqrt{10}$, $a=2$

(2)

(1)の結果より,

$$A(0,0,2),\ B\left(\sqrt{5},\sqrt{5},2\right)$$

である。さらに, $P(\cos t,\sin t,-1)$ であるから,

$$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{5},\sqrt{5},0\right),\ \overrightarrow{AP}=(\cos t,\sin t,-3)$$

である。これより,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=\left(\sqrt{5},\sqrt{5},0\right)\cdot(\cos t,\sin t,-3)$$
$$=\sqrt{5}\cos t+\sqrt{5}\sin t$$
$$=\sqrt{5}(\cos t+\sin t)$$

である。

(答) $\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{5},\sqrt{5},0\right)$, $\overrightarrow{AP}=(\cos t,\sin t,-3)$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=\sqrt{5}(\cos t+\sin t)$

(3)

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=5+5$$
$$=10$$
$$\left|\overrightarrow{AP}\right|^2=\cos^2 t+\sin^2 t+9$$
$$=10$$

であるから,

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AP}\right|^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{10\cdot 10-5(1+2\sin t\cos t)}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{95-5\sin 2t}$$

と表すことができる。ここで, $0\leqq t\leqq 2\pi$ より,

$$0\leqq 2t\leqq 4\pi$$

であるから,

$$2t=\frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi$$
$$\Leftrightarrow t=\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$$

のとき,

$$\sin 2t=1$$

であり, このとき S は最小となる。その値は,

$$\frac{1}{2}\sqrt{90}=\frac{3}{2}\sqrt{10}$$

である。

(答) $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ $\left(t=\frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi\right)$

3

(1)

ケーリー・ハミルトンの公式より，

$$A^2 - r^2E = O$$
$$\Leftrightarrow A^2 = r^2E \qquad \cdots ①$$

である。ただし，O と E はそれぞれ2行2列の零行列，単位行列である

$\left(O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$。①より，

$$\begin{aligned}A^{2k} &= \left(A^2\right)^k\\ &= \left(r^2E\right)^k\\ &= r^{2k}E\\ &= \begin{pmatrix}r^{2k}&0\\0&r^{2k}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^{2k+1} &= A\left(A^2\right)^k\\ &= A\left(r^2E\right)^k\\ &= r^{2k}A\\ &= \begin{pmatrix}0&-r^{2k+1}\\-r^{2k+1}&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

(答) $A^{2k}=\begin{pmatrix}r^{2k}&0\\0&r^{2k}\end{pmatrix}$，$A^{2k+1}=\begin{pmatrix}0&-r^{2k+1}\\-r^{2k+1}&0\end{pmatrix}$

(2)

[1] n が偶数のとき，$n=2k$ $(k=1,2,3,\ldots)$ とおくと，(1)の結果より，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}x_{2k}\\y_{2k}\end{pmatrix}\\ &= A^{2k}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}r^{2k}&0\\0&r^{2k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-r^{2k}\\2r^{2k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-r^n\\2r^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

[2] n が奇数のとき，$n=2k+1$ $(k=1,2,3,\ldots)$ とおくと，(1)の結果より，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}x_{2k+1}\\y_{2k+1}\end{pmatrix}\\ &= A^{2k+1}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0&-r^{2k+1}\\-r^{2k+1}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-2r^{2k+1}\\r^{2k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2r^n\\r^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。これは $n=1$ のときも成り立つ。

以上，[1]，[2]より，

$$(x_n,\ y_n)=\begin{cases}(-r^n,\ 2r^n) & (n\text{が偶数のとき})\\(-2r^n,\ r^n) & (n\text{が奇数のとき})\end{cases}$$

である。

(答) $(x_n,\ y_n)=\begin{cases}(-r^n,\ 2r^n) & (n\text{が偶数のとき})\\(-2r^n,\ r^n) & (n\text{が奇数のとき})\end{cases}$

(3)

(2)より，n の偶奇に関係なく，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right|=\sqrt{x_n^2+y_n^2}=\sqrt{5}\,r^n,\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}_{n-1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=4r^{2n-1}$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned}d_n^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}\right|^2\\ &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n-1}}\right|^2\\ &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n-1}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n-1}}\\ &= 5r^{2n}+5r^{2n-2}-2\cdot4r^{2n-1}\\ &= r^{2n-2}\left(5r^2-8r+5\right)\end{aligned}$$

である。これより，数列 $\{d_n\}$ は，初項 $\sqrt{5r^2-8r+5}$，公比 r の等比数列であり，一般項は，

$$d_n=r^{n-1}\sqrt{5r^2-8r+5}$$

である。さらに，この無限等比級数が収束し，その値が3である条件は，

$$\begin{cases}0<r<1\\ \dfrac{\sqrt{5r^2-8r+5}}{1-r}=3\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<r<1\\ 5r^2-8r+5=9(1-r)^2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<r<1\\ (2r-1)(r-2)=0\end{cases}$$

であるから，

$$r=\frac{1}{2}$$

を得る。

(答) $d_1=\sqrt{5r^2-8r+5}$，$d_n=r^{n-1}\sqrt{5r^2-8r+5}$，$r=\dfrac{1}{2}$

4

(1)

$$
\begin{aligned}
&f(x)=0\\
&\Leftrightarrow 2a\log x-(\log x)^2=0\\
&\Leftrightarrow \log x(2a-\log x)=0\\
&\Leftrightarrow \log x=0,\ 2a\\
&\Leftrightarrow x=1,\ e^{2a}
\end{aligned}
$$

であるから，

$x_1=1$， $x_2=e^{2a}$

である。次に，$y=f(x)$ のグラフの概形を考える。

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{2a}{x}-\frac{2\log x}{x}\\
&=\frac{2}{x}(a-\log x)
\end{aligned}
$$

より，$y=f(x)$ の増減表として以下の表を得る。

x	(0)	$\cdots$	e^a	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$(-\infty)$	↗	a^2	↘	$(-\infty)$

この増減表より，$f(x)$ は $x=e^a$ で最大値 a^2 をとることがわかる。

(答)　$x_1=1$，$x_2=e^{2a}$，$f(x)$ の最大値 a^2 $(x=e^a$ のとき$)$

(2)

$$\ell_1 : y=2a(x-1)=2ax-2a \qquad \cdots①$$

$$\ell_2 : y=-\frac{2a}{e^{2a}}\left(x-e^{2a}\right)=-\frac{2a}{e^{2a}}x+2a \qquad \cdots②$$

である。①，②より，

$$
\begin{aligned}
X(a)&=\frac{2e^{2a}}{e^{2a}+1}\\
&=\frac{2}{1+\frac{1}{e^{2a}}}
\end{aligned}
$$

である。よって，

$$
\begin{aligned}
\lim_{a\to\infty}X(a)&=\lim_{a\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{e^{2a}}}\\
&=2
\end{aligned}
$$

である。

(答)　$\lim_{a\to\infty}X(a)=2$

(3)

求める面積を S とすると，

$$
\begin{aligned}
S&=\int_1^{e^2}\left\{2\log x-(\log x)^2\right\}dx\\
&=2\left[x\log x-x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}(x)'(\log x)^2\,dx\\
&=2\left(2e^2-e^2+1\right)-\left[x(\log x)^2\right]_1^{e^2}+\int_1^{e^2}2\log x\,dx\\
&=2e^2+2-4e^2+2\left[x\log x-x\right]_1^{e^2}\\
&=4
\end{aligned}
$$

である。

(答)　4