

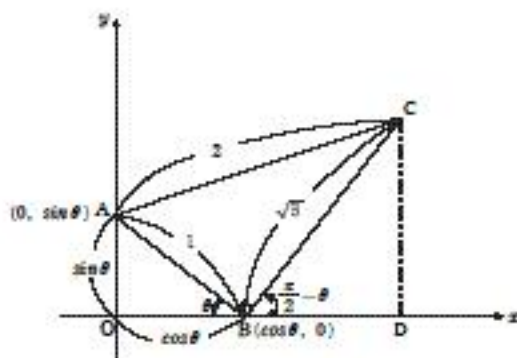
(1)

$$AB = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \underline{1}$$

$$BC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \underline{\sqrt{3}}$$

上記の結果より, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $\angle ACB = \frac{\pi}{6}$ とわかる.

$$\underline{\angle OBA = \theta, \angle CBD = \frac{\pi}{2} - \theta}$$

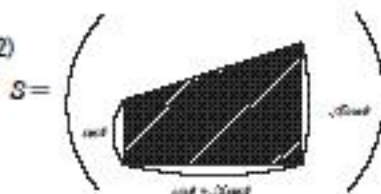


$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$$

$$= (\cos \theta, 0) + \sqrt{3} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right), \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right)$$

$$\therefore \underline{C(\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta, \sqrt{3} \cos \theta)}$$

(2)



$$= \frac{1}{2} (\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) (\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta)$$

$$= 2 \sin \theta \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ここで, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $0 < 2\theta < \pi$

$2\theta = \frac{\pi}{2}$ (つまり, $\theta = \frac{\pi}{4}$) のとき, S は最大となる.

$$\underline{S \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(\text{等号成立は } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき} \right)} \quad (\text{証明終})$$

(3)

$$AO + CD = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$$

$$= 2 \left(\sin \theta \cdot \frac{1}{2} + \cos \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より, } \frac{\pi}{3} < \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{5}{6} \pi \right)$$

$\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ (つまり, $\theta = \frac{\pi}{6}$) のとき, $AO + CD$ は最大となる.

$$\underline{AO + CD \leq 2 \quad \left(\text{等号成立は } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき} \right)} \quad (\text{証明終})$$

(1)

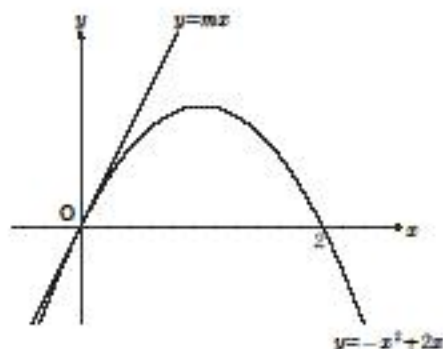
 $y = -x^2 + 2x$ と $y = mx$ を連立して

$$-x^2 + 2x = mx \iff x^2 + (m-2)x = 0$$

これが重解を持てばよいから、

$$\begin{aligned} D &= (m-2)^2 - 4 \cdot 0 \\ &= (m-2)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore m = 2$$



(2)

$$C: \begin{cases} y = x^2 - 2x & (x \leq 0, 2 \leq x) \\ y = -x^2 + 2x & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

上記の曲線 C と $l: y = mx$ が

原点以外の異なる 2 点で交わるのは、右図より

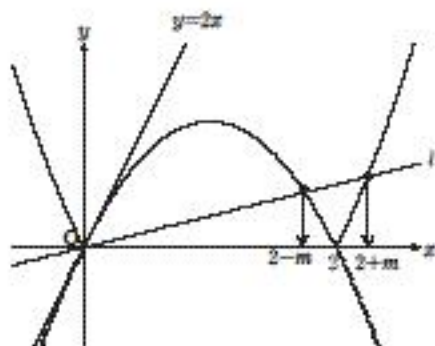
$$0 < m < 2$$

このとき、 $y = -x^2 + 2x$ と $y = mx$ を連立して

$$x\{x + (m-2)\} = 0 \quad \therefore x = 0, 2-m$$

原点以外の交点は、 $(2-m, m(2-m))$ $y = x^2 - 2x$ と $y = mx$ を連立して

$$x\{x - (m+2)\} = 0 \quad \therefore x = 0, 2+m$$

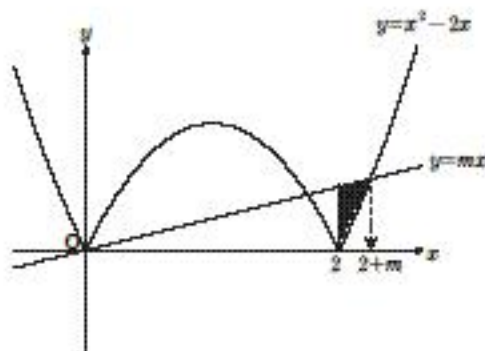
原点以外の交点は、 $(2+m, m(2+m))$ 以上より、求める 2 つの交点座標は、 $(2-m, m(2-m)), (2+m, m(2+m))$

(3)

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y \leq mx \\ y \geq |x^2 - 2x| \end{cases} \quad \text{を表す領域は、}$$

右図の斜線部分

$$\begin{aligned} S &= \int_2^{2+m} (mx - (x^2 - 2x)) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{m+2}{2}x^2 \right]_2^{2+m} \\ &= -\frac{1}{3}(2+m)^3 + \frac{1}{2}(2+m)^3 + \frac{8}{3} - 2(m+2) \\ &= \frac{m^2}{6}(m+6) \\ \therefore S &= \frac{m^2}{6}(m+6) \quad (0 < m < 2) \end{aligned}$$



(1)

$$\log_{10} \left(\frac{2}{3} \right) = \log_{10} 2 - \log_{10} 3 = 0.3010 - 0.4771 = \underline{-0.1761}$$

$$\log_{10} \left(\frac{1}{2} \right) = -\log_{10} 2 = \underline{-0.3010}$$

(2)

$\left(\frac{2}{3} \right)^m \geq \frac{1}{10}$ の辺々常用対数をとる.

$$m \log_{10} \left(\frac{2}{3} \right) \geq -1 \iff m \leq \frac{1}{0.1761} = 5.67 \dots$$

$\therefore$ (最大の自然数 m) = 5

$\left(\frac{1}{2} \right)^n \geq \frac{1}{10}$ の辺々常用対数をとる.

$$n \log_{10} \left(\frac{1}{2} \right) \geq -1 \iff n \leq \frac{1}{0.3010} = 3.32 \dots$$

$\therefore$ (最大の自然数 n) = 3

(3)

$\left(\frac{2}{3} \right)^x \left(\frac{1}{2} \right)^y \geq \frac{1}{10}$ の辺々常用対数をとる.

$$x \log_{10} \left(\frac{2}{3} \right) + y \log_{10} \left(\frac{1}{2} \right) \geq -1$$

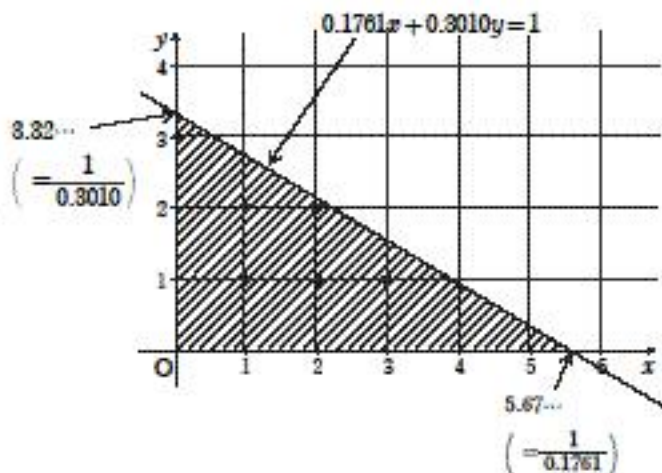
$$\iff -0.1761x - 0.3010y \geq -1$$

$$\iff 0.1761x + 0.3010y \leq 1$$

$$\therefore \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

これを図示すれば右図の通り.

(ただし、境界を含む)



(4) (3)の結果を用いて考える.

(3)で図示した領域上の格子点(m , n)であるから、明らかに

$(m, n) = (1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2)$ は含まれる.

$(m, n) = (4, 1)$ について調べる $0.1761 \times 4 + 0.3010 \times 1 = 1.0054 \not\leq 1$

つまり、 $(m, n) = (4, 1)$ は満たさないとわかる.

以上より、以下の5点のみ.

$(m, n) = (1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2)$