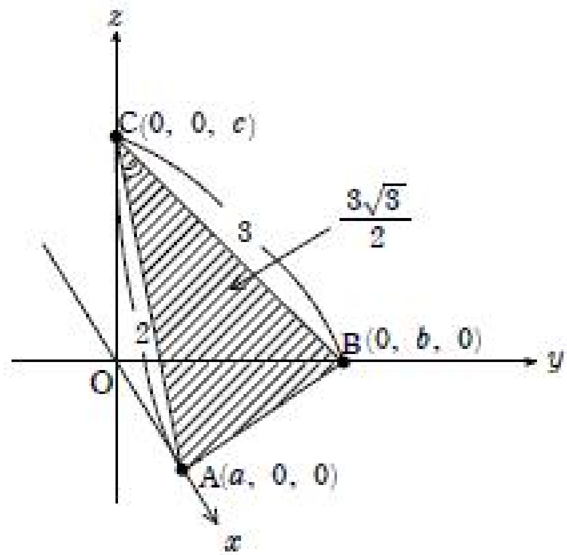
$\boxed{1}$

(1) $\triangle ACB = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot \sin\angle ACB = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \sin\angle ACB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（答）

（$\angle$ACB は鋭角より $\dfrac{\pi}{3}$）



余弦定理より，

$AB^2 = 2^2 + 3^2 - 2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}$

$= 7$　　$\therefore\ AB = \sqrt{7}\ (>0)$　　（答）

(2)

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 & \cdots\cdots① \\ b^2 + c^2 = 9 & \cdots\cdots② \\ c^2 + a^2 = 4 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①＋②＋③：$a^2 + b^2 + c^2 = 10$　　$\cdots$④

①と④，②と④，③と④より，

$c^2 = 3,\ a^2 = 1,\ b^2 = 6$

$\therefore\ a = 1,\ b = \sqrt{6},\ c = \sqrt{3}$　　（答）

(3) （四面体 OABC の体積）$= \left(\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（答）

上記の結果を使い，O から $\triangle$ACB に下ろした垂線の長さを h とすれば，

$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot h = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　$\therefore\ h = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　（答）

$\boxed{2}$

(1)

$$t=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$$
$$=2\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

ここで，$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より，$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{5}{6}\pi$

$$\therefore\ -\frac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leqq1$$

$\therefore\ -1\leqq t\leqq2$ （答）

(2)

$$\sin3\theta=\sin(2\theta+\theta)$$
$$=\sin2\theta\cdot\cos\theta+\cos2\theta\cdot\sin\theta$$
$$=2\sin\theta\cos^2\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$$
$$=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta$$

$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ （証明終）

ここで，

$$t^3-3t=8\sin^3\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-6\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=-2\left\{\underline{\underline{3\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-4\sin^3\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}}\right\}$$
$$=-2\sin3\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\therefore\ \frac{t^3-3t}{2}=-\sin(3\theta+\pi)$$

$=\sin3\theta$ （証明終）

(3)

$$f(\theta)=\frac{2}{3}\cdot\frac{t^3-3t}{2}-t$$

$=\frac{1}{3}t^3-2t\ \ (=g(t))$ （答）

ここで，$g(t)=\frac{1}{3}t^3-2t\ \ (-1\leqq t\leqq2)$ の増減を調べる．

$$g'(t)=t^2-2$$
$$=\left(t+\sqrt{2}\right)\left(t-\sqrt{2}\right)$$

t	-1	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$\frac{5}{3}$	↘	$-\frac{4\sqrt{2}}{3}$	↗	$-\frac{4}{3}$

・（最大値）$=g(-1)=\frac{5}{3}$ （答）

$$t=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-1\iff\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$
$$\therefore\ \theta+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}$$

$\therefore\ \theta=-\frac{\pi}{2}$ のとき （答）

・（最小値）$=g(\sqrt{2})=-\frac{4\sqrt{2}}{3}$ （答）

$$t=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\iff\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\therefore\ \theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$$

$\therefore\ \theta=-\frac{\pi}{12},\ \frac{5\pi}{12}$ のとき （答）

$\boxed{3}$

(1)

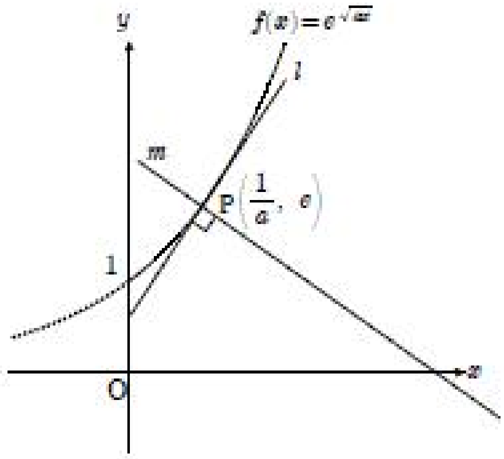
$$f'(x)=e^{\sqrt{ax}}\cdot\frac{a}{2\sqrt{ax}}=\frac{\sqrt{a}e^{\sqrt{ax}}}{2\sqrt{x}}$$

$$l:\ y=\frac{ae}{2}\left(x-\frac{1}{a}\right)+e$$

$$\Longleftrightarrow y=\frac{ae}{2}x+\frac{e}{2} \qquad \text{（答）}$$

$$m:y=-\frac{2}{ae}\left(x-\frac{1}{a}\right)+e$$

$$\Longleftrightarrow y=-\frac{2}{ae}x+\frac{2}{a^2e}+e \qquad \text{（答）}$$



(2) $I=\int_0^{\frac{1}{a}}f(x)dx$ とおく．

ここで，$t=\sqrt{ax}$ $(t^2=ax)$ とおくと，$2tdt=adx$

x	$0 \to \frac{1}{a}$
t	$0 \to 1$

$$I=\int_0^{\frac{1}{a}}e^{\sqrt{ax}}dx=\int_0^1 e^t\cdot\frac{2t}{a}dt$$

$$=\frac{2}{a}\int_0^1 t\left(e^t\right)'dt$$

$$=\frac{2}{a}\Big[te^t\Big]_0^1-\frac{2}{a}\int_0^1 e^t dt$$

$$=\frac{2e}{a}-\frac{2}{a}(e-1)$$

$$=\frac{2}{a} \qquad \text{（答）}$$

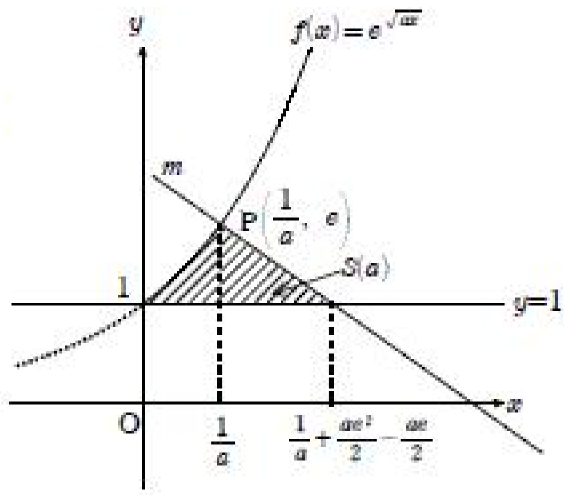
(3)

$$S(a)=\int_0^{\frac{1}{a}}f(x)dx-\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\cdot\frac{ae^2-ae}{2}\cdot(e-1)$$

（(2)を利用）

$$=\frac{2}{a}-\frac{1}{a}+\frac{ae}{4}(e-1)^2$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{ae(e-1)^2}{4} \qquad \text{（答）}$$



相加平均・相乗平均の関係より，

$$S(a)\geqq 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{ae(e-1)^2}{4}}=\sqrt{e}(e-1)$$

$$\therefore\ \left(S(a)\text{の最小値}\right)=\sqrt{e}(e-1) \qquad \text{（答）}$$

等号成立は $\dfrac{1}{a}=\dfrac{ae(e-1)^2}{4} \Longleftrightarrow a^2=\dfrac{4}{e(e-1)^2}$ のとき

$$\therefore\ a=\frac{2}{\sqrt{e}(e-1)}\text{のとき} \qquad \text{（答）}$$

（別解）

相加・相乗を使い最小値を求めているが，微分してもよい．

$$S'(a)=-\frac{1}{a^2}+\frac{e(e-1)^2}{4}$$

a	(0)	$\cdots$	$\dfrac{2}{\sqrt{2}(e-1)}$	$\cdots$
$S'(a)$		$-$	0	$+$
$S(a)$		$\searrow$	（最小）	$\nearrow$

$\boxed{4}$

(1)

$$xA+yE=uA+vE$$
$$\iff (x-u)A=(v-y)E$$

$x \neq u$ とすると，$A=kE$（k:実数）となり，$A=\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ の成分に矛盾．

よって，$x=u$ となり，$v=y$ とわかる．　　（証明終）

(2) $A=a_1A+b_1E$ は $a_1=1,\ b_1=0$ で成立．（∵ (1)より）

ケーリー・ハミルトンの公式により，

$$A^2-7A+12E=0$$
$$\iff A^2=\underline{\underline{7A-12E}} \quad \cdots\cdots ①$$

$A^2=a_2A+b_2E$ は①と(1)より，$a_2=7,\ b_2=-12$

以上より，

$$a_1=1,\ a_2=7,\ b_1=0,\ b_2=-12 \qquad \text{（答）}$$

(3)

$$A^{n+1}=A\cdot A^n$$
$$\begin{aligned} \iff a_{n+1}A+b_{n+1}E &= A\left(a_nA+b_nE\right) \\ &= a_n(7E-12E)+b_nA \quad (\because\ ①\text{より}) \\ &= (7a_n+b_n)A-12a_nE \end{aligned}$$

(1)より，

$$\begin{cases} a_{n+1}=7a_n+b_n \\ b_{n+1}=-12a_n \end{cases} \quad \cdots ②$$

②より，

$$a_{n+2}=7a_{n+1}-12a_n$$
$$\iff a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$$
$$\therefore \begin{cases} a_{n+2}-3a_{n+1}=4(a_{n+1}-3a_n) \\ a_{n+2}-4a_{n+1}=3(a_{n+1}-4a_n) \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} a_{n+1}-3a_n=4^n \\ a_{n+1}-4a_n=3^n \end{cases} \quad \therefore\ \underline{\underline{a_n=4^n-3^n}} \quad (n \geqq 1)$$

これを②に代入して，

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= -12a_n \\ &= -12(4^n-3^n) \\ &= 12\cdot 3^n-12\cdot 4^n \\ &= 4\cdot 3^{n+1}-3\cdot 4^{n+1} \end{aligned}$$

$\therefore\ \underline{\underline{b_n=4\cdot 3^n-3\cdot 4^n}}$（$n \geqq 2$，ただし $n=1$ もみたすので $n \geqq 1$）

以上まとめて，$\begin{cases} a_n=4^n-3^n \\ b_n=4\cdot 3^n-3\cdot 4^n \end{cases}$ $(n \geqq 1)$　　（答）

(4)

$$\begin{aligned} & A+A^2+A^3+\cdots+A^n \\ &= (a_1A+b_1E)+(a_2A+b_2E)+(a_3A+b_3E)+\cdots+(a_nA+b_nE) \\ &= (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)A+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)E \\ &= \left(\frac{4(4^n-1)}{4-1}-\frac{3(3^n-1)}{3-1}\right)A+\left(\frac{12(3^n-1)}{3-1}-\frac{12(4^n-1)}{4-1}\right)E \\ &= \underbrace{\underline{\underline{\left(\frac{4^{n+1}-4}{3}-\frac{3^{n+1}-3}{2}\right)}}}_{c_n}A+\underbrace{\underline{\underline{\left(2\cdot 3^{n+1}-6-4^{n+1}+4\right)}}}_{d_n}E \end{aligned}$$

(1)より，

$$\begin{cases} c_n=\dfrac{1}{3}\cdot 4^{n+1}-\dfrac{1}{2}\cdot 3^{n+1}+\dfrac{1}{6} \\ d_n=2\cdot 3^{n+1}-4^{n+1}-2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\cdot 4^{n+1}-\frac{1}{2}\cdot 3^{n+1}+\frac{1}{6}}{2\cdot 3^{n+1}-4^{n+1}-2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1-2\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned} \qquad \text{（答）}$$