

平成 25 年度入学者選抜学力検査問題

(前期日程)

数 学

理 工 学 域
数 物 科 学 類
物 質 化 学 類
機 械 工 学 類
電 子 情 報 学 類
環 境 デ ザ イ ン 学 類
自 然 シ ス テ ム 学 類
医 薬 保 健 学 域
医 学 類
薬 学 類 ・ 創 薬 科 学 類

(注 意)

- 1 問題紙は指示のあるまで開かないこと。
- 2 問題紙は本文 2 ページであり，答案用紙は 4 枚である。
- 3 答えはすべて答案用紙の指定欄に記入し，網かけの部分や裏面には記入しないこと。
- 4 問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

1 正の実数 a, b, c に対して、 O を原点とする座標空間に 3 点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ がある。 $AC=2$, $BC=3$ かつ $\triangle ABC$ の面積が $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ となるとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\sin \angle ACB$ の値を求めよ。また、線分 AB の長さを求めよ。
- (2) a, b, c の値を求めよ。
- (3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。また、原点 O から $\triangle ABC$ に下ろした垂線の長さを求めよ。

2 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ に対して、関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = \frac{2}{3} \sin 3\theta - \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta$$

とおく。 $t = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ を示せ。また、 $\frac{t^3 - 3t}{2} = \sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。
- (3) $f(\theta)$ を t の式で表せ。また、それを利用して $f(\theta)$ の最大値と最小値、および最大値、最小値を与える θ の値を求めよ。

3 $a > 0$ とする。 $x \geq 0$ における関数 $f(x) = e^{\sqrt{ax}}$ と曲線 $C: y = f(x)$ について、次の問いに答えよ。

- (1) C 上の点 $P\left(\frac{1}{a}, f\left(\frac{1}{a}\right)\right)$ における接線 ℓ の方程式を求めよ。また、 P を通り ℓ に直交する直線 m の方程式を求めよ。
- (2) 定積分 $\int_0^{\frac{1}{a}} f(x) dx$ を $t = \sqrt{ax}$ とおくことにより求めよ。
- (3) 曲線 C 、直線 $y = 1$ および直線 m で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。また、 $a > 0$ における $S(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。

4 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、次の問いに答えよ。

- (1) 実数 x, y, u, v が、 $xA + yE = uA + vE$ を満たすならば、 $x = u, y = v$ であることを示せ。
- (2) $A = a_1A + b_1E, A^2 = a_2A + b_2E$ となる実数 a_1, b_1, a_2, b_2 を求めよ。
- (3) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $A^n = a_nA + b_nE$ となる実数 a_n, b_n を n を用いて表せ。
- (4) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、実数 c_n, d_n が

$$A + A^2 + A^3 + \dots + A^n = c_nA + d_nE$$

を満たしているとき、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{d_n}$ を求めよ。

