

$$1.(1) \quad C: y = x^2 + 2x \text{ より } y' = 2x + 2$$

C 上の点 $(a, a^2 + 2a)$ における接線 l_a は

$$y - (a^2 + 2a) = (2a + 2)(x - a)$$

$$\underline{y = 2(a+1)x - a^2} \quad \dots\dots\dots ①$$

同様にして接線 l_b は

$$\underline{y = 2(b+1)x - b^2} \quad \dots\dots\dots ②$$

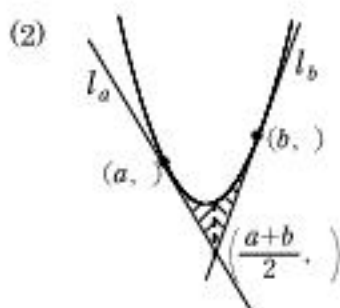
l_a と l_b の交点の x 座標は①, ②を連立して

$$2(a+1)x - a^2 = 2(b+1)x - b^2$$

$$2(a-b)x = (a+b)(a-b)$$

$a < b$ なので,

$$\underline{x = \frac{a+b}{2}}$$



求める面積 S は図の斜線部分で

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[(x^2 + 2x) - \{2(a+1)x - a^2\} \right] dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left[(x^2 + 2x) - \{2(b+1)x - b^2\} \right] dx \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^2 dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-a)^3 \right]_a^{\frac{a+b}{2}} + \left[\frac{1}{3}(x-b)^3 \right]_{\frac{a+b}{2}}^b \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{2} \right)^3 - \frac{1}{3} \left(-\frac{b-a}{2} \right)^3 \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{12}(b-a)^3}} \end{aligned}$$

(3) $l_a \perp l_b$ となるためには

$$2(a+1) \cdot 2(b+1) = -1$$

$$\underline{(a+1) \cdot (b+1) = -\frac{1}{4}} \quad \dots\dots\dots ③$$

また,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{12}(b-a)^3 \\ &= \frac{1}{12}\{(b+1) - (a+1)\}^3 \\ &= \frac{1}{12}[(b+1) + \{-(a+1)\}]^3 \end{aligned}$$

$a < b$ と③より $a+1 < 0 < b+1$ なので,

$b+1 (> 0)$ と $-(a+1) (> 0)$ に相加相乗平均の関係式を用いると,

$$S \geq \frac{1}{12} \left(2\sqrt{(b+1) \cdot \{-(a+1)\}} \right)^3 = \frac{1}{12} \left(2\sqrt{\frac{1}{4}} \right)^3 = \frac{1}{12} \quad (\because ③)$$

よって S の最小値は $\underline{\underline{\frac{1}{12}}}$

等号が成立するのは $b+1 = -(a+1)$ ($\dots ④$) のときなので,

これを③に代入して

$$-(a+1)^2 = -\frac{1}{4}$$

$$(a+1)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a+1 = \pm \frac{1}{2}$$

$$0 > a+1 \text{ なので } a+1 = -\frac{1}{2} \qquad \therefore \underline{\underline{a = -\frac{3}{2}}}$$

$$\text{④に代入して} \quad \underline{\underline{b = -\frac{1}{2}}}$$

2.(1) $P(2)$ は1回目に任意の玉を1個取り出し、

2回目に1回目と同じ番号の玉を取り出す場合の確率なので

$$P(2)=\frac{8}{8}\times\frac{1}{7}=\underline{\frac{1}{7}}$$

$P(3)$ は1回目に任意の玉を1個取り出し、

2回目に1回目と違う番号の玉を取り出し、

3回目に1回目または2回目と同じ番号の玉を取り出す場合の確率なので、

$$P(3)=\frac{8}{8}\times\frac{6}{7}\times\frac{2}{6}=\underline{\frac{2}{7}}$$

(2) 番号は1から4までの4種類なので必ず5回目までには同じ番号の玉を取り出す、

よって、 $k \geq 6$ (ただし、 k は整数)のとき

$$P(k)=0$$

(証明終了)

(3) $k=1, k \geq 6$ のとき $P(k)=0$

$$(1)\text{より } P(2)=\frac{1}{7}, P(3)=\frac{2}{7}$$

(1)と同様にして

$$P(4)=\frac{8}{8}\times\frac{6}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{35}$$

$$P(5)=\frac{8}{8}\times\frac{6}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{4}=\frac{8}{35}$$

よって、求める期待値を E とおくと、

$$E=2\times\frac{1}{7}+3\times\frac{2}{7}+4\times\frac{12}{35}+5\times\frac{8}{35}=\underline{\underline{\frac{128}{35}}}$$

$$3.(1) \ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (n-1)a_{n-1} + na_n = 2^n - 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$n=1$ のとき $\textcircled{1}$ より

$$a_1 = 2^1 - 1$$

$$= 1$$

$n \geq 2$ のとき $\textcircled{1}$ より

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (n-1)a_{n-1} + na_n = 2^n - 1 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (n-1)a_{n-1} = 2^{n-1} - 1 \end{cases}$$

辺々の差をとると

$$na_n = 2^{n-1}$$

$$a_n = \frac{2^{n-1}}{n}$$

これは $n=1$ でも成立するので、

$$\underline{a_n = \frac{2^{n-1}}{n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)}$$

$$(2) \ S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \quad (\dots \textcircled{2}) \text{ とおくとき、}$$

$S_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する.

[I] $n=1$ のとき

$$S_1 = 4 - \frac{1+2}{2^0} = 1 \text{ は } \textcircled{2} \text{ と (1) より}$$

$$S_1 = \frac{1}{a_1} = 1 \text{ なので明らかに成立する.}$$

[II] $n=l \quad (l=1, 2, 3, \dots)$ のとき

$$S_l = 4 - \frac{l+2}{2^{l-1}} \text{ が成り立つと仮定する.}$$

両辺に $\frac{1}{a_{l+1}}$ を加えると

$$S_l + \frac{1}{a_{l+1}} = 4 - \frac{l+2}{2^{l-1}} + \frac{1}{a_{l+1}}$$

$\textcircled{2}$ と (1) より

$$\begin{aligned} S_{l+1} &= 4 - \frac{l+2}{2^{l-1}} + \frac{l+1}{2^l} \\ &= 4 - \frac{2 \times (l+2) - (l+1)}{2^l} \\ &= 4 - \frac{l+3}{2^l} \end{aligned}$$

よって $n=l+1$ のときも成立.

以上 [I], [II] より、すべての自然数 n で $S_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$ は成立する.

(証明終了)

$$(3) \ T_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{a_k}$$

$$= \sum_{k=1}^n k \times \frac{k}{2^{k-1}} \quad (\because (1))$$

$$= \sum_{k=1}^n k^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad \text{とおく.}$$

$$T_n = 1^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 3^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$- \frac{1}{2} T_n = \underline{1^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + (n-1)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$\frac{1}{2} T_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 2 \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 2S_n - \frac{1 \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n^2}{2^n}$$

$$= 2 \left(4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} \right) - 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) - \frac{n^2}{2^n}$$

$$= 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}$$

両辺を 2 倍して、

$$T_n = 12 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^{n-1}}$$

$$\therefore \underline{\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_k} = 12 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^{n-1}}}$$