第１問

(1) $x^2+y^2+z^2=1$ …… ①

$$(x, y, z)=(2, -1, 0)+t(-1, a, a)$$
$$=(2-t, -1+at, at) \quad \cdots\cdots \text{②}$$

①と②を連立して，

$$(2-t)^2+(-1+at)^2+(at)^2=1$$
$$\iff (2a^2+1)t^2-2(a+2)t+4=0 \quad \cdots\cdots \text{③}$$

③が異なる２つの実数解をもてばよく，

$$\frac{D}{4}=(a+2)^2-4(2a^2+1)>0$$
$$\iff 7a\left(a-\frac{4}{7}\right)<0 \qquad \therefore\ \underline{0<a<\frac{4}{7}}$$

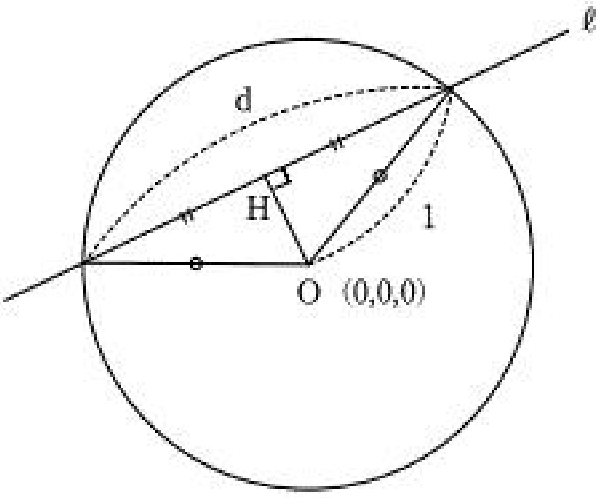
(2) 原点Oからℓに下ろした垂線の足をHとすると，実数sを用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2-s, -1+as, as)$$

と表せる．

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$と$\ell$は垂直なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(-1, a, a)=0 \quad \therefore\ s=\frac{a+2}{2a^2+1}$$
$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\frac{4a^2-a}{2a^2+1}, \frac{-a^2+2a-1}{2a^2+1}, \frac{a^2+2a}{2a^2+1}\right)$$
$$\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2=\frac{18a^4-8a^3+11a^2-4a+1}{(2a^2+1)^2}$$



これより，

$$d=2\sqrt{1-\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2}$$
$$=2\sqrt{\frac{-(2a^2+1)(7a^2-4a)}{(2a^2+1)^2}}$$
$$=\underline{2\sqrt{\frac{-7a^2+4a}{2a^2+1}} \quad \left(0<a<\frac{4}{7}\right)}$$

(3) $f(a)=\dfrac{-7a^2+4a}{2a^2+1}\ \left(0<a<\dfrac{4}{7}\right)$ （$d=2\sqrt{f(a)}$のこと）とすると，

$$f'(a)=\frac{(-14a+4)(2a^2+1)-(-7a^2+4a)\cdot 4a}{(2a^2+1)^2}$$
$$=\frac{-2(4a-1)(a+2)}{(2a^2+1)^2}$$

増減表を描くと次の通り：

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\left(\frac{4}{7}\right)$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$	(0)	↗	$\frac{1}{2}$	↘	(0)

増減表より，$\underline{a=\frac{1}{4}}$のとき，（$d$の最大値）$=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\underline{\sqrt{2}}$

第2問

(1) $f(x)=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ とする． （$f(-x)=f(x)$ より， $f(x)$ は偶関数）

$$f'(x)=-\frac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{e^{-x}-e^x}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$f''(x)=\frac{(-e^{-x}-e^x)(e^x+e^{-x})^2-(e^{-x}-e^x)\cdot 2(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^4}$$

$$=\frac{e^{2x}-6+e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^3}$$

ここで，

$$e^{2x}-6+\frac{1}{e^{2x}}=0$$

$$\Longleftrightarrow e^{4x}-6e^{2x}+1=0$$

$$\therefore e^{2x}=3\pm2\sqrt{2}$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}\log\left(3\pm2\sqrt{2}\right)$$

$$=\log\left(\sqrt{2}-1\right),\log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

増減表を書くと次の通り，

x	$(-\infty)$	$\cdots$	$\log\left(\sqrt{2}-1\right)$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\log\left(\sqrt{2}+1\right)$	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	(0)	↗	(変曲点)	↗	$\frac{1}{2}$	↘	(変曲点)	↘	(0)

$$\therefore (\text{点Pの}x\text{座標})=\log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

(2) $b=\log\left(\sqrt{2}+1\right)$ となり，

$$\tan\theta=e^b$$

$$=\sqrt{2}+1$$

ここで，

$$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

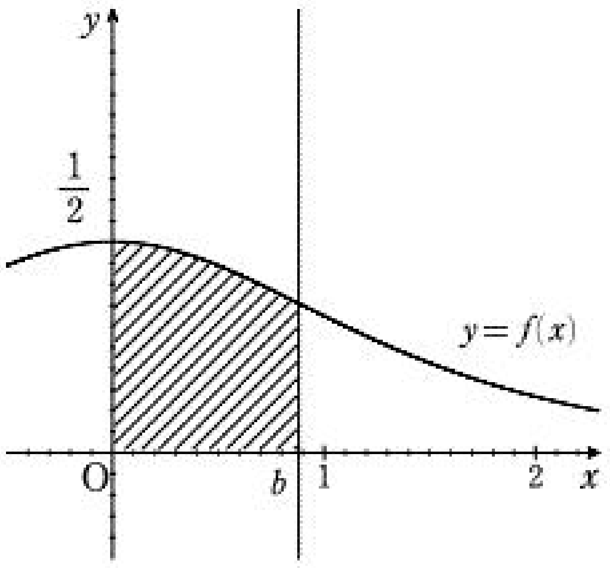
$$=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{1-\left(\sqrt{2}+1\right)^2}$$

$$=-1$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より， $0<2\theta<\pi$ だから，

$$2\theta=\frac{3}{4}\pi \qquad \therefore \theta=\frac{3}{8}\pi$$

(3) (1)の増減表より， $y=f(x)$ のグラフは右図の通り．
求める面積を S とおく．



$$S=\int_0^b\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$$

$$=\int_0^b\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$$

ここで， $e^x=\tan\theta$ と置換

$$\therefore e^xdx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

x	0	$\to$	b
θ	$\frac{\pi}{4}$	$\to$	$\frac{3}{8}\pi$

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\left[\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}$$

$$=\frac{\pi}{8}$$

第3問

(1) $P=\begin{pmatrix} x & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & y \end{pmatrix}$ に対し，ケーリー・ハミルトンの公式により，

$$\begin{cases} P^2-(x+y)P+\left(xy-\frac{2}{9}\right)E=O & \cdots\cdots① \\ P^2=P & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①，②より，$(x+y-1)P=\left(xy-\frac{2}{9}\right)E$

（i）$x+y-1\neq 0$のとき，　$P=kE$（k：実数）となり不適

（ii）$x+y-1=0$のとき，　$xy-\frac{2}{9}=0$

つまり，

$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{2}{9} \end{cases} \quad \therefore (x,y)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

以上(i)，(ii)より，$\underline{(x,y)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)}$

(2)　$P_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$，　$P_2=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

このとき，

$$P_1P_2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}=\frac{2}{9}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$(P_1P_2)^2=\frac{4}{81}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}=\frac{16}{81}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \quad \left(=\frac{8}{9}P_1P_2\right)$$

これを繰り返し行えば，

$$(P_1P_2)^n=\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}P_1P_2$$

$$\therefore (P_1P_2)^nP_1=\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}P_1P_2P_1$$

$$=\left(\frac{8}{9}\right)^{n}P_1 \quad \left(\because P_1P_2P_1=\frac{8}{9}P_1\right)$$

$$\underline{\therefore r_n=\left(\frac{8}{9}\right)^{n}}$$

(3)　(1)より，

$$\begin{cases} P_1^2-P_1=O & (P_1^2=P_1) \\ P_2^2-P_2=O & (P_2^2=P_2) \end{cases}$$

これより，$P_1, P_1P_2, P_1P_2P_1, P_1P_2P_1P_2, P_1P_2P_1P_2P_1, P_1P_2P_1P_2P_1P_2$ の6個から調べればよい．

(i) $P_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

(ii) $P_1P_2=\frac{2}{9}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$

(iii) $P_1P_2P_1=\frac{8}{9}P_1=\frac{8}{9}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

(iv) $P_1P_2P_1P_2=(P_1P_2)^2=\frac{8}{9}P_1P_2=\frac{16}{81}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$

(v) $P_1P_2P_1P_2P_1=\frac{64}{81}P_1=\frac{64}{81}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

(vi) $P_1P_2P_1P_2P_1P_2=(P_1P_2)^3=\frac{64}{81}P_1P_2=\frac{128}{729}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$

これらは全て異なるので，$\underline{6\text{（個）}}$

第４問

①|①②|①②③|①②③④|①②③…

群　1　2　3　4　…

と群分して考える．

(1)　数 100 が書かれた玉は第 100 群の 100 番目に初めて現れる．

$$\sum_{k=1}^{100} k=\frac{100}{2}\cdot 101=5050 \qquad \underline{\therefore 5050\text{番目}}$$

(2)　$2n^2$ 番目の玉は第 k 群に存在するとして，

$$\frac{(k-1)k}{2}<2n^2\leqq\frac{k(k+1)}{2}$$

$$\Longleftrightarrow (k-1)k\leqq 4n^2\leqq k(k+1) \qquad \therefore k=2n(\text{群})$$

ここで，$2n^2-\dfrac{(2n-1)\cdot 2n}{2}=2n^2-(2n^2-n)=n$ (番目)

$$\underline{\therefore n}$$

(3)

数		個数	数		個数
1	…	$2n$	$n+1$	…	$n-1$
2	…	$2n-1$	$n+2$	…	$n-2$
3	…	$2n-2$	$n+3$	…	$n-3$
n	…	$2n-(n-1)$ $=n+1$	$2n-1$	…	1

数 $k(1\leqq k\leqq n)$ の個数は，$2n-(k-1)$ 個

数 $k(n+1\leqq k\leqq 2n)$ の個数は，$2n-k$ 個

求める確率 P は

$$P=\frac{1}{{}_{2n^2}C_2}\left\{\sum_{k=1}^{n}{}_{2n+1-k}C_2+\sum_{k=n+1}^{2n-2}{}_{2n-k}C_2\right\}$$

$$=\frac{2}{2n^2(2n^2-1)}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+1-k)(2n-k)}{2}+\sum_{k=n+1}^{2n-2}\frac{(2n-k)(2n-k-1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2n^2(2n^2-1)}\left\{\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)-(4n+1)\cdot\frac{n}{2}(n+1)+2n(2n+1)\cdot n\right.$$

$$\left.+\frac{n-2}{6}(n-1)(2n-3)+\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{16n^3-6n^2+2n}{12n^2(2n^2-1)}$$

$$=\underline{\frac{8n^2-3n+1}{6n(2n^2-1)}}$$