

1.

(1) $\overrightarrow{PA} + s\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ より,

$$\begin{aligned} -\overrightarrow{AP} + s(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) &= \vec{0} \\ s\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} &= (s+4)\overrightarrow{AP} \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに, } \overrightarrow{AP} = \frac{s}{s+4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{s+4}\overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$ なので,

$$\underline{\alpha = \frac{s}{s+4}, \beta = \frac{3}{s+4}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) 点 D は直線 AP 上の点なので

$$\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AP} \quad (k \text{ は実数})$$

とおける.

よって,

$$\overrightarrow{AD} = \frac{sk}{s+4}\overrightarrow{AB} + \frac{3k}{s+4}\overrightarrow{AC} \quad \dots\dots ①$$

また, 点 D は直線 BC 上の点なので

$$\overrightarrow{BD} = l\overrightarrow{BC} \quad (l \text{ は実数})$$

とおける.

よって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} &= l(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ \overrightarrow{AD} &= (1-l)\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

$\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$ なので, ①, ②より

$$\begin{cases} \frac{sk}{s+4} = 1-l \\ \frac{3k}{s+4} = l \end{cases} \quad \dots\dots ③$$

辺々の和を採ると

$$\begin{aligned} \frac{(s+3)k}{s+4} &= 1 \\ k &= \frac{s+4}{s+3} \end{aligned}$$

③に代入して,

$$l = \frac{3}{s+3}$$

よって,

$$\begin{aligned} \frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{DC}|} &= \frac{|l\overrightarrow{BC}|}{|(1-l)\overrightarrow{BC}|} \\ &= \frac{|l|}{|1-l|} \\ &= \frac{\frac{3}{s+3}}{\frac{s}{s+3}} \\ &= \frac{3}{s} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PD}|} &= \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|(k-1)\overrightarrow{AP}|} \\ &= \frac{1}{k-1} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{s+3}} \\ &= s+3 \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(3) \quad \triangle ABC \text{ の面積} = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

ここで, $|\overrightarrow{AB}| = 7$, $|\overrightarrow{AC}| = 6$

$|\overrightarrow{BC}|^2 = 5^2$ より,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 &= 5^2 \\ |\overrightarrow{AC}|^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AB}|^2 &= 5^2 \\ 6^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + 7^2 &= 5^2 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 30 \end{aligned}$$

なので,

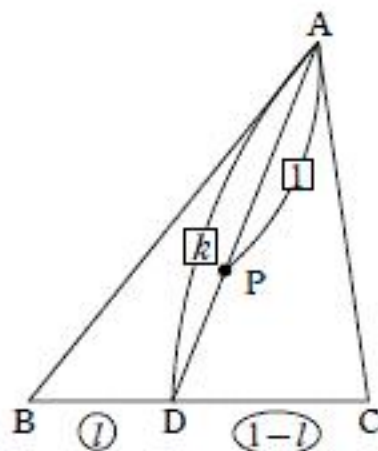
$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ の面積} &= \frac{1}{2} \sqrt{7^2 \cdot 6^2 - 30^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{42^2 - 30^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(42+30)(42-30)} \\ &= 6\sqrt{6} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \triangle APC &= \frac{1}{k} \triangle ADC \\ &= \frac{1}{k} \cdot (1-l) \triangle ABC \end{aligned}$$

$\triangle APC = 2\sqrt{6}$, $\triangle ABC = 6\sqrt{6}$, $k = \frac{s+4}{s+3}$, $l = \frac{3}{s+3}$ を代入すると,

$$\underline{s = 2} \quad \dots\dots (\text{答})$$



2.

(1) $C_1: y = ax^2 + b$ より $y' = 2ax$

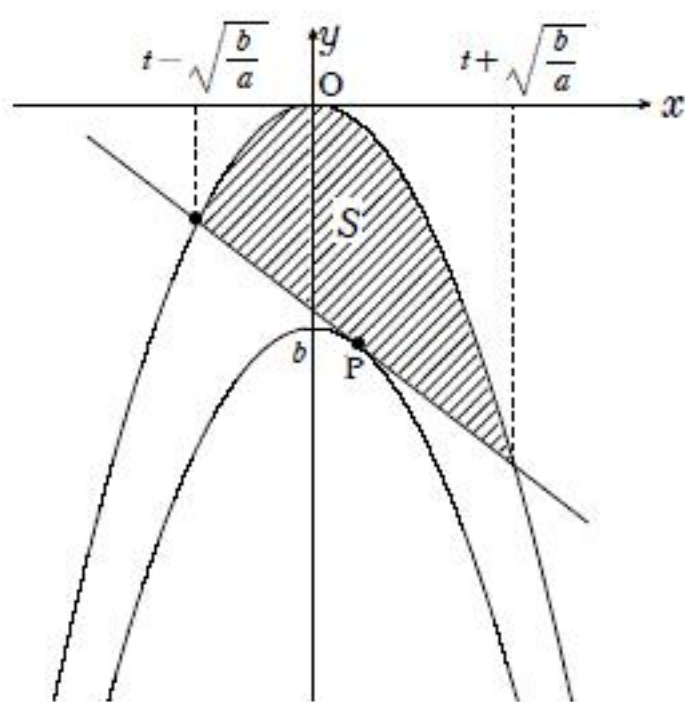
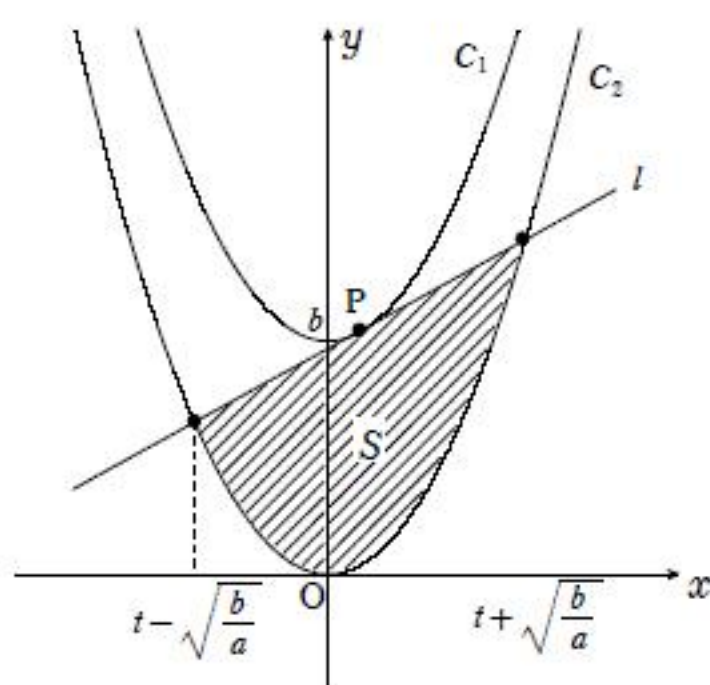
C_1 上の点 $P(t, at^2 + b)$ における接線 l は

$$\begin{aligned} y - (at^2 + b) &= 2at(x - t) \\ \underline{y &= 2atx - at^2 + b} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) l と $C_2: y = ax^2$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} 2atx - at^2 + b &= ax^2 \\ ax^2 + 2(-at)x + at^2 - b &= 0 \\ x &= \frac{-(-at) \pm \sqrt{(-at)^2 - a \cdot (at^2 - b)}}{a} \\ &= \frac{at \pm \sqrt{ab}}{a} \\ &= \underline{t \pm \sqrt{\frac{b}{a}}} \quad \left(ab > 0 \text{ より } \frac{b}{a} > 0 \right) \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)



(i) $a > 0$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_{t - \sqrt{\frac{b}{a}}}^{t + \sqrt{\frac{b}{a}}} \{ (2atx - at^2 + b) - ax^2 \} dx \\ &= - \int_{t - \sqrt{\frac{b}{a}}}^{t + \sqrt{\frac{b}{a}}} a \left(x - t - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \left(x - t + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) dx \\ &= -a \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) \left\{ \left(t + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) - \left(t - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \right\}^3 \\ &= \frac{a}{6} \left(2\sqrt{\frac{b}{a}} \right)^3 \\ &= \frac{a}{6} \cdot 8 \frac{b}{a} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} \\ &= \underline{\frac{4}{3} b \sqrt{\frac{b}{a}}} \quad (a > 0 \text{ のとき } b > 0) \end{aligned}$$

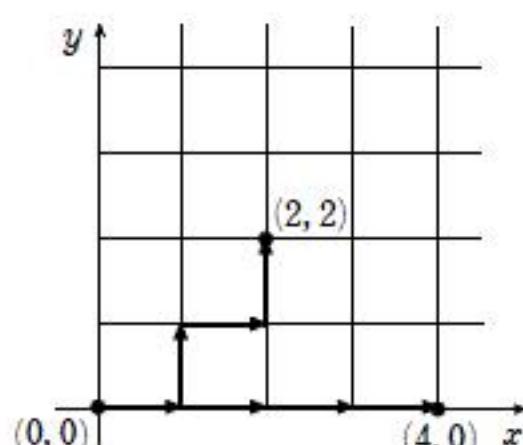
(ii) $a < 0$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_{t - \sqrt{\frac{b}{a}}}^{t + \sqrt{\frac{b}{a}}} \{ ax^2 - (2atx - at^2 + b) \} dx \\ &= \underline{-\frac{4}{3} b \sqrt{\frac{b}{a}}} \quad (a < 0 \text{ のとき } b < 0) \end{aligned}$$

よって、 S は点 P の位置によらず一定である。

3.

(1)



格子点 $(0, 0)$ から格子点 $(4, 0)$ へつなぐためには、

各格子点の 4 回の分岐で 4 回とも横へ進むと考えるとよいので、

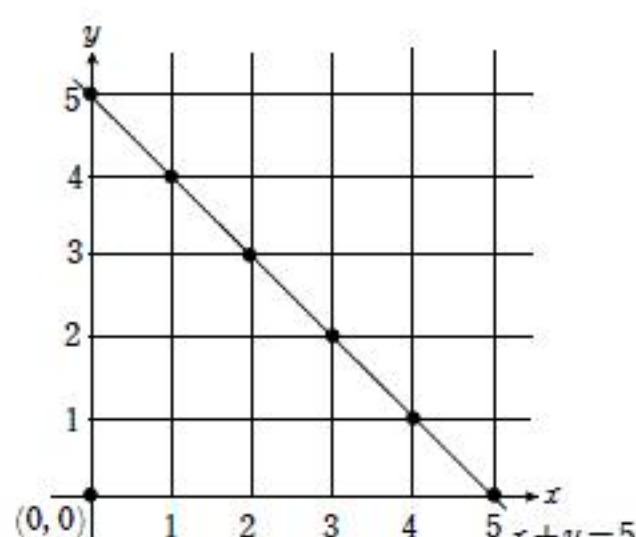
$${}_4C_4 = \underline{1} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

格子点 $(0, 0)$ から格子点 $(2, 2)$ へつなぐためには、

各格子点の 4 回の分岐で横へ 2 回進むと考えるとよいので、

$${}_4C_2 = \underline{6} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(2)



(1)と同様に考える.

$$(0, 0) \text{ から } (5, 0) \text{ へつなぐ方法は } {}_5C_5 = 1$$

$$(0, 0) \text{ から } (4, 1) \text{ へつなぐ方法は } {}_5C_4 = 5$$

$$(0, 0) \text{ から } (3, 2) \text{ へつなぐ方法は } {}_5C_3 = 10$$

$$(0, 0) \text{ から } (2, 3) \text{ へつなぐ方法は } {}_5C_2 = 10$$

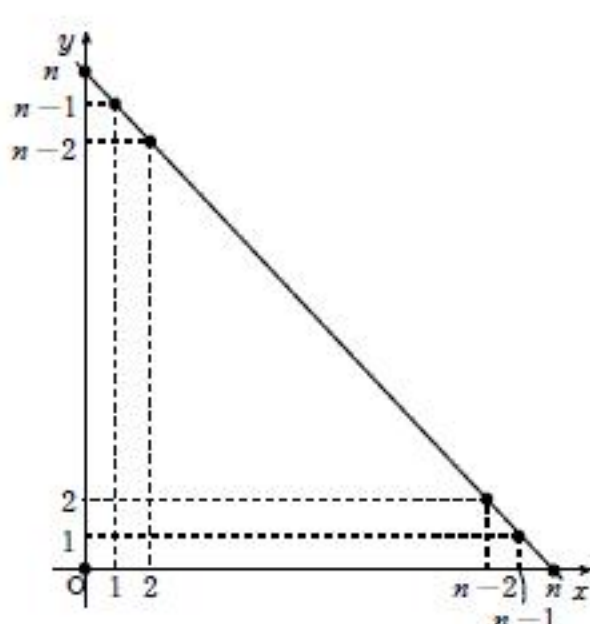
$$(0, 0) \text{ から } (1, 4) \text{ へつなぐ方法は } {}_5C_1 = 5$$

$$(0, 0) \text{ から } (0, 5) \text{ へつなぐ方法は } {}_5C_0 = 1$$

よって、

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = \underline{32} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(3)



(2)と同様に考える.

$$(0, 0) \text{ から } (n, 0) \text{ へつなぐ方法は } {}_nC_n$$

$$(0, 0) \text{ から } (n-1, 1) \text{ へつなぐ方法は } {}_nC_{n-1}$$

$$(0, 0) \text{ から } (n-2, 2) \text{ へつなぐ方法は } {}_nC_{n-2}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$(0, 0) \text{ から } (1, n-1) \text{ へつなぐ方法は } {}_nC_1$$

$$(0, 0) \text{ から } (0, n) \text{ へつなぐ方法は } {}_nC_0$$

よって、

$${}_nC_n + {}_nC_{n-1} + {}_nC_{n-2} + \cdots + {}_nC_1 + {}_nC_0$$

を求めるとよい.

ここで二項定理より、

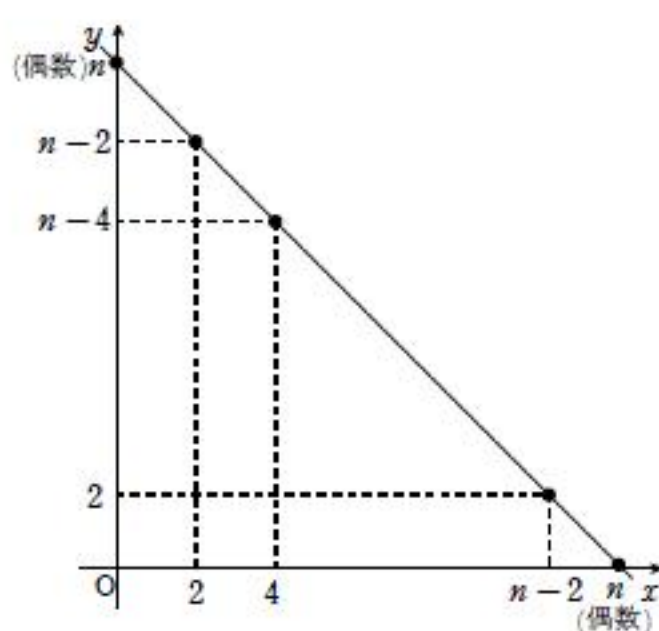
$$(x+y)^n = {}_nC_n x^n y^0 + {}_nC_{n-1} x^{n-1} y^1 + \cdots + {}_nC_1 x^1 y^{n-1} + {}_nC_0 x^0 y^n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x=y=1$ とおくと、

$$2^n = {}_nC_n + {}_nC_{n-1} + \cdots + {}_nC_1 + {}_nC_0$$

よって、求める数は $\underline{2^n}$ $\cdots \cdots (\text{答})$

(4)



(3)と同様に考える.

k と l はともに偶数なので、 k と l の和である n も偶数.

よって、

$${}_nC_n + {}_nC_{n-2} + {}_nC_{n-4} + \cdots + {}_nC_2 + {}_nC_0$$

を求めるとよい.

①に $x=y=1$ を代入すると

$$2^n = {}_nC_n + {}_nC_{n-1} + {}_nC_{n-2} + {}_nC_{n-3} + \cdots + {}_nC_1 + {}_nC_0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①に $x=1, y=-1$ を代入すると

$$0 = {}_nC_n - {}_nC_{n-1} + {}_nC_{n-2} - {}_nC_{n-3} + \cdots - {}_nC_1 + {}_nC_0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②+③より

$$2^n = 2({}_nC_n + {}_nC_{n-2} + {}_nC_{n-4} + \cdots + {}_nC_2 + {}_nC_0)$$

よって、求める数は

$${}_nC_n + {}_nC_{n-2} + {}_nC_{n-4} + \cdots + {}_nC_2 + {}_nC_0 = \underline{2^{n-1}} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$