

$$\boxed{1} \quad |\overline{OA}|=1, |\overline{OB}|=2, |\overline{OC}|=h \quad (>0)$$

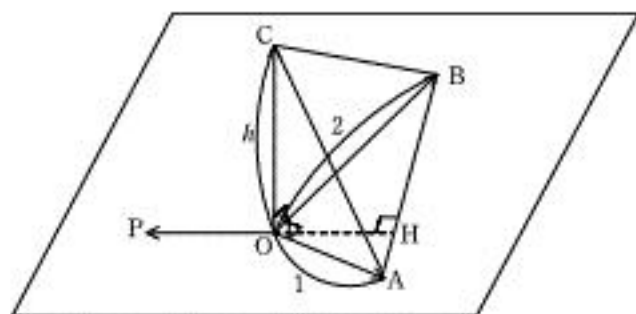
$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OB} \cdot \overline{OC} = \overline{OC} \cdot \overline{OA} = 0$$

$$(1) \quad \begin{aligned} \overline{CP} &= \overline{OP} - \overline{OC} \\ &= \alpha \overline{OA} + \beta \overline{OB} - \overline{OC} \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \overline{CP} \cdot \overline{CA} &= (\alpha \overline{OA} + \beta \overline{OB} - \overline{OC}) \cdot (\overline{OA} - \overline{OC}) \\ &= \alpha + h^2 = 0 \quad \text{ゆえに, } \underline{\alpha = -h^2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{CP} \cdot \overline{CB} &= (\alpha \overline{OA} + \beta \overline{OB} - \overline{OC}) \cdot (\overline{OB} - \overline{OC}) \\ &= 4\beta + h^2 = 0 \quad \text{ゆえに, } \underline{\beta = -\frac{1}{4}h^2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



$$(2) \quad (1) \text{より, } \overline{OP} = -h^2 \overline{OA} - \frac{1}{4}h^2 \overline{OB} \text{ と表せる.}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \overline{OP} \cdot \overline{AB} &= \left( -h^2 \overline{OA} - \frac{1}{4}h^2 \overline{OB} \right) \cdot (\overline{OB} - \overline{OA}) \\ &= h^2 - \frac{1}{4}h^2 \cdot 4 = 0 \quad (\overline{OP} \perp \overline{AB}) \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

$$(3) \quad \text{直線 OP と直線 AB の交点を H とする.}$$

$\triangle PAB$  は,  $PA=PB$  の二等辺三角形とすると,

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= k \overline{OP} \quad (k \text{ は実数}) \\ &= -h^2 k \left( \overline{OA} + \frac{1}{4} \overline{OB} \right) \\ &= -h^2 k \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4\overline{OA} + \overline{OB}}{1+4} \end{aligned}$$

これより,  $AH:HB=1:4$  となり, 矛盾.

$\triangle PAB$  は,  $PA=PB$  (辺  $AB$  を底辺) の二等辺三角形ではない. (証明終)

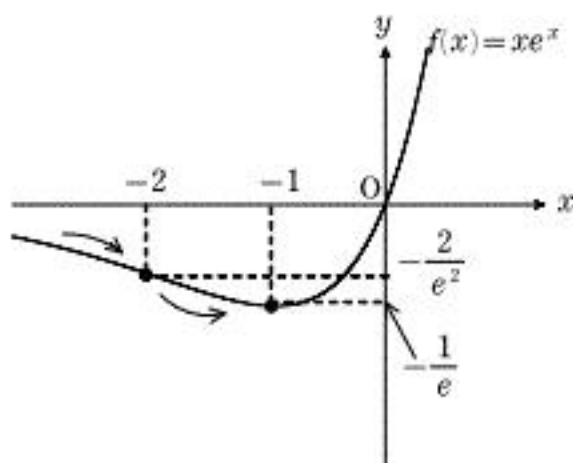
$$\begin{aligned}
 (1) \quad & f(x) = xe^x \\
 & f'(x) = (x+1)e^x \\
 & f''(x) = (x+2)e^x
 \end{aligned}$$

増減表を描くと下記の通り.

| $x$      | $(-\infty)$ | $\cdots$   | $-2$ | $\cdots$   | $-1$ | $\cdots$   | $(+\infty)$ |
|----------|-------------|------------|------|------------|------|------------|-------------|
| $f'(x)$  |             | $-$        | $-$  | $-$        | $0$  | $+$        |             |
| $f''(x)$ |             | $-$        | $0$  | $+$        | $+$  | $+$        |             |
| $f(x)$   | $(0)$       | $\searrow$ | 変曲点  | $\searrow$ | 極小   | $\nearrow$ | $(+\infty)$ |

$$\text{変曲点} \left( -2, -\frac{2}{e^2} \right), (\text{極小値}) = f(-1) = -\frac{1}{e}$$

グラフを描くと右図の通り.

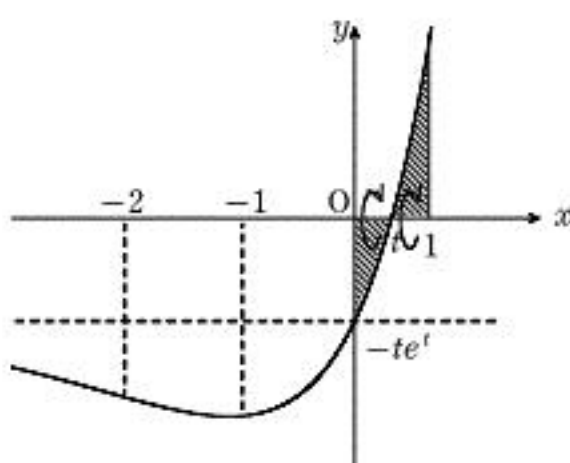


$$(2) \quad \int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + C_1 \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned}
 \int x^2 e^{2x} dx &= \int x^2 \left( \frac{1}{2} e^{2x} \right)' dx = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \int xe^{2x} dx = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \int x \left( \frac{1}{2} e^{2x} \right)' dx \\
 &= \frac{x^2}{2} e^{2x} - \frac{x}{2} e^{2x} + \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \\
 &= \frac{1}{4} (2x^2 - 2x + 1) e^{2x} + C_2 \quad (\text{答}) \\
 &\quad (\text{ただし, } C_1 \text{ と } C_2 \text{ は積分定数とする})
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad f(t) = te^t \text{ より, } g(x) = f(x) - f(t) = xe^x - te^t \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$\begin{aligned}
 V(t) &= \pi \int_0^1 (xe^x - te^t)^2 dx \\
 &= \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx - 2te^t \pi \int_0^1 xe^x dx + t^2 e^{2t} \pi \\
 &= \pi \left( t^2 e^{2t} - 2te^t + \frac{e^2 - 1}{4} \right) \quad (\text{答}) \\
 &\quad (0 \leq t \leq 1)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (4) \quad V'(t) &= \pi (2te^{2t} + 2t^2 e^{2t} - 2e^t - 2te^t) \\
 &= \pi \{ 2t(t+1)e^{2t} - 2(t+1)e^t \} \\
 &= \underbrace{2\pi(t+1)(te^t - 1)e^t}_{(\text{正})}
 \end{aligned}$$

$y = te^t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) は  $t$  における単調増加.

$$(t=0) \cdots \cdots y=0 \quad \text{より,}$$

$$(t=1) \cdots \cdots y=e$$

$te^t = 1$  をみたす実数  $t$  がただ 1 つ存在し, それを  $t_0$  ( $0 < t_0 < 1$ ) とする.

| $t$     | $0$ | $\cdots$   | $t_0$ | $\cdots$   | $1$ |
|---------|-----|------------|-------|------------|-----|
| $V'(t)$ |     | $-$        | $0$   | $+$        |     |
| $V(t)$  |     | $\searrow$ | (最小)  | $\nearrow$ |     |

これより,  $t_0 = a$  とわかる. ( $ae^a = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$ )

$$\begin{aligned}
 (\text{最小値}) V(a) &= \pi \left( a^2 e^{2a} - 2ae^a + \frac{e^2 - 1}{4} \right) \\
 &= \pi \left( 1^2 - 2 \cdot 1 + \frac{e^2 - 1}{4} \right) \quad (\textcircled{1} \text{ より}) \\
 &= \frac{\pi}{4} (e^2 - 5) \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

また,

$$f(a) = ae^a = 1 \quad (\text{答})$$

(①より)

【別解】

$f(t) = T$  とすると,

$$V(t) = \left\{ (T-1)^2 + \frac{1}{4} (e^2 - 5) \right\} \pi \quad (0 \leq T \leq e)$$

とおける.

よって,  $T = f(a) = 1$  のときに,  $V(a) = \frac{1}{4} (e^2 - 5) \pi$  となる.

- (1)  $P(t, \log_3 t)$ ,  $Q(u, 3^u)$  はともに

実線  $x+y=s$  上にあるので,

$$\begin{cases} t + \log_3 t = s \\ u + 3^u = s \end{cases} \dots\dots ①$$

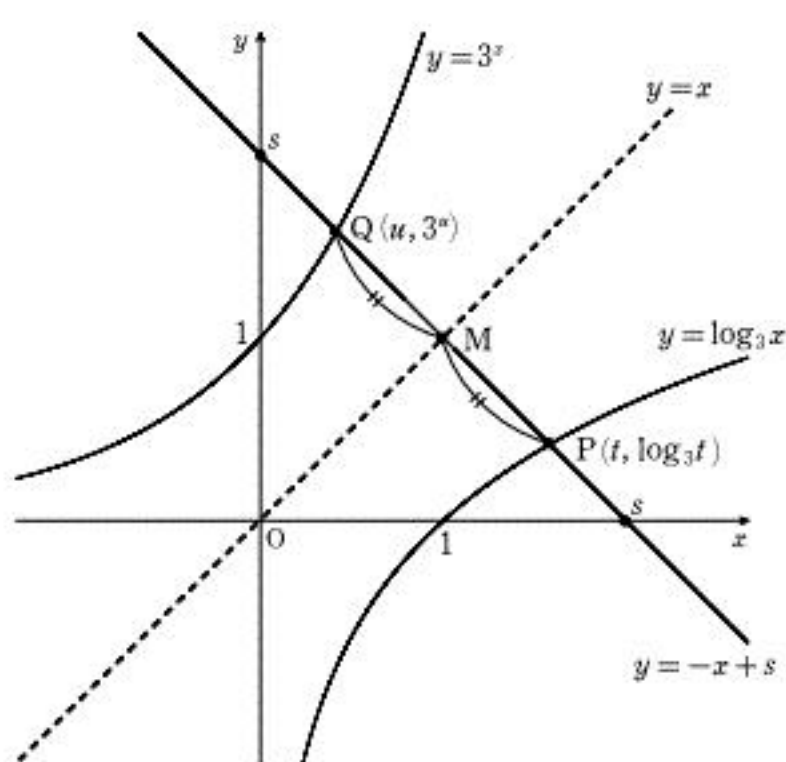
2点  $P, Q$  は  $y=x$  に対称なため

$$\begin{cases} 3^u = t \\ u = \log_3 t \end{cases} \dots\dots ②$$

2点  $P, Q$  の中点を  $M(x, y)$  とすると,

$$\begin{cases} x = \frac{t+u}{2} = \frac{t+\log_3 t}{2} = \frac{s}{2} \\ y = \frac{\log_3 t + 3^u}{2} = \frac{u+3^u}{2} = \frac{s}{2} \end{cases}$$

(②より)      (①より)      (②より)      (①より)



ゆえに、中点  $M\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right)$

(証明終)

- (2) ①, ②より,

$$\begin{aligned} s &= u + 3^u \\ &= u + t \end{aligned} \quad (\text{証明終})$$

②より,

$$u = \log_3 t \quad (\text{証明終})$$

- (3)  $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{su-k}{t-3}$  が有限確定するには, (分母) $\rightarrow 0$  ( $t \rightarrow 3$ ) より,

(分子) $\rightarrow 0$  ( $t \rightarrow 3$ ) が必要である.

$$\lim_{t \rightarrow 3} (su-k) = \lim_{t \rightarrow 3} \{(\log_3 t + t) \log_3 t - k\} = 4 - k = 0 \quad \text{すなわち, } k=4$$

逆にこのとき,

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(\log_3 t + t) \log_3 t - 4}{t-3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 3} \left\{ \log_3 t + (\log_3 t + 4) \cdot \frac{\log_3 t - 1}{t-3} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 3} \left\{ \log_3 t + (\log_3 t + 4) \cdot \frac{\log_3 t - \log_3 3}{t-3} \right\} \\ &= 1 + 5 \cdot \frac{1}{3 \log 3} \quad \left( f(t) = \log_3 t = \frac{\log t}{\log 3} \text{ に対し, } f'(t) = \frac{1}{t \log 3} \right) \\ &= 1 + \frac{5}{3 \log 3} \quad (\text{有限確定し, 十分}) \end{aligned}$$

したがって,  $k=4$ ,  $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{su-k}{t-3} = 1 + \frac{5}{3 \log 3}$  (答)

(1) 公比  $r(x)$  は,

$$r(x) = x(1 - ax) \\ = -a \left( x - \frac{1}{2a} \right)^2 + \frac{1}{4a}$$

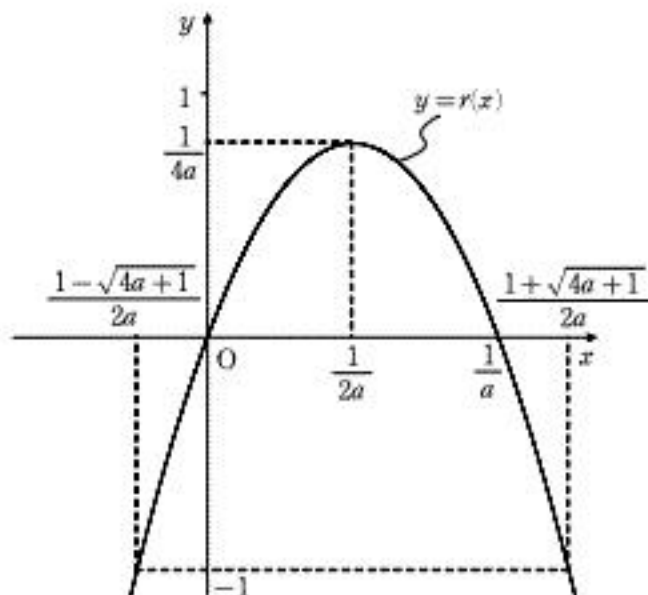
$a > 1$  に対して,  $\frac{1}{4a} < 1$

次に,  $r(x) = -1 \iff ax^2 - x - 1 = 0$

すなわち,  $x = \frac{1 \pm \sqrt{4a+1}}{2a}$

収束条件は,  $-1 < r(x) < 1$

ゆえに,  $\frac{1 - \sqrt{4a+1}}{2a} < x < \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2a}$  (答)



このとき,  $S(x) = \frac{a}{1 - r(x)} = \frac{a}{ax^2 - x + 1}$  (答)

(2)  $\frac{1 - \sqrt{4a+1}}{2a} < x < \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2a}$  のとき,  $-1 < r(x) \leq \frac{1}{4a}$  なので

$S(x) = \frac{a}{1 - r(x)}$  の範囲は,  $\frac{a}{2} < S(x) \leq \frac{a}{1 - \frac{1}{4a}}$  (答)

(3)  $0 \leq x \leq \frac{1}{a}$  において,  $0 \leq r(x) \leq \frac{1}{4a}$  ゆえに,  $a \leq S(x) \leq \frac{a}{1 - \frac{1}{4a}}$

したがって,

$$\int_0^{\frac{1}{a}} a dx < \int_0^{\frac{1}{a}} S(x) dx < \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{a}{1 - \frac{1}{4a}} dx$$

$$\iff 1 < I(a) < \frac{1}{1 - \frac{1}{4a}}$$

(最右辺)  $\rightarrow 1 (a \rightarrow \infty)$

はさみうちの原理より,  $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = 1$  (答)