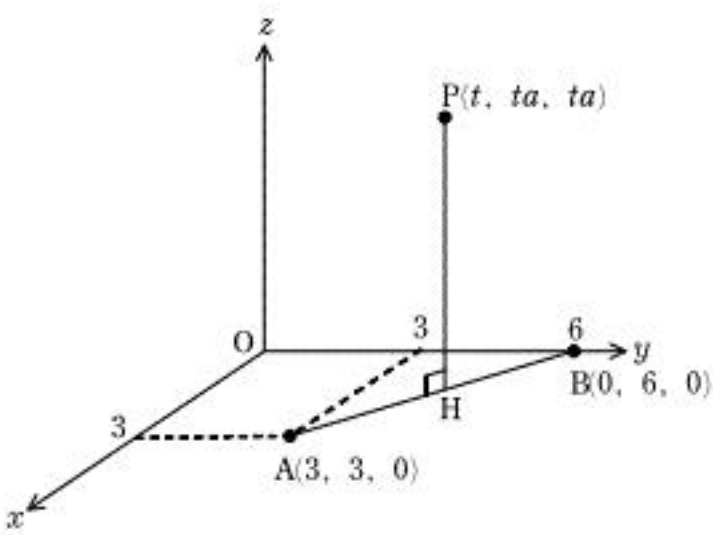




(1) z 軸の方向ベクトルを $\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\overline{PH} // \overline{z} \text{ より,}$$

$$\overline{PH} = k \overline{z} \quad (\text{ただし, } k \text{ は実数})$$

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= \overline{OP} + k \overline{z} \\ &= \begin{pmatrix} t \\ ta \\ ta \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t \\ ta \\ k+ta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

H は xy 平面上の点なので、

$$\begin{aligned} k+ta &= 0 \\ k &= -ta \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= \begin{pmatrix} t \\ ta \\ 0 \end{pmatrix} \\ \therefore \underline{H(t, ta, 0)} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

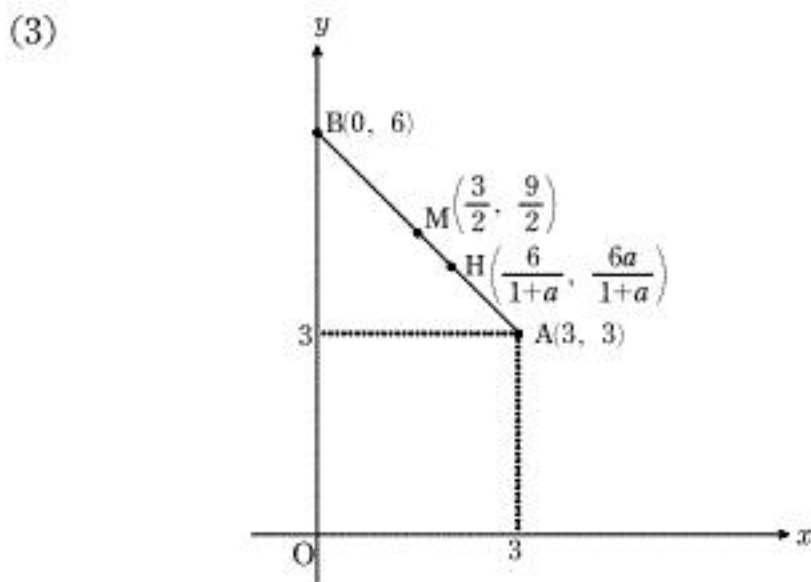
(2) $\overline{AH} // \overline{AB}$ より、

$$\overline{AH} = l \overline{AB} \quad (\text{ただし, } l \text{ は実数})$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t-3 \\ ta-3 \\ 0-0 \end{pmatrix} &= l \begin{pmatrix} 0-3 \\ 6-3 \\ 0-0 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} t-3 = -3l \\ ta-3 = 3l \end{cases} \end{aligned}$$

辺々の和をとると、

$$\begin{aligned} t(1+a)-6 &= 0 \quad 1 < a < 3 \text{ より, } a \neq -1 \text{ なので,} \\ t &= \frac{6}{1+a} \\ \therefore \underline{H\left(\frac{6}{1+a}, \frac{6a}{1+a}, 0\right)} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$



AB の中点 M の座標は $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$

$1 < a < 3$ より、

$$\begin{aligned} 2 &< 1+a < 4 \\ 3 &> \frac{6}{1+a} > \frac{3}{2} \end{aligned}$$

よって、A、H、M は上図のような順に線分 AB 上に並ぶ。

$$\begin{aligned} |\overline{AH}| : |\overline{HM}| &= \left| 3 - \frac{6}{1+a} \right| : \left| \frac{6}{1+a} - \frac{3}{2} \right| \\ &= \left| \frac{3(a-1)}{1+a} \right| : \left| \frac{3(3-a)}{2(1+a)} \right| \\ &= 2(a-1) : 3-a \quad (\because 1 < a < 3) \end{aligned}$$

$$\therefore \underline{\frac{AH}{HM} = \frac{2(a-1)}{3-a}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(4)

$$\begin{cases} \overline{OH} = \left(\frac{6}{1+a}, \frac{6a}{1+a}\right) \\ \overline{OM} = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right) \end{cases} \text{ なので,}$$

$$\begin{aligned} \triangle OHM \text{ の面積} &= \frac{1}{2} \left| \frac{6}{1+a} \cdot \frac{9}{2} - \frac{6a}{1+a} \cdot \frac{3}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{1+a} \cdot \frac{3}{2} |3-a| \\ &= \frac{9(3-a)}{2(1+a)} \end{aligned}$$

四面体 OPMH の体積が 2 なので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \triangle OHM \text{ の面積} \cdot |\overline{PH}| &= 2 \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{9(3-a)}{2(1+a)} \cdot \frac{6a}{1+a} &= 2 \quad \left(\because |\overline{PH}| = ta = \frac{6a}{1+a} \right) \\ 9a(3-a) &= 2(1+a)^2 \\ 11a^2 - 23a + 2 &= 0 \\ (11a-1)(a-2) &= 0 \end{aligned}$$

$1 < a < 3$ なので、

$$\underline{a=2} \quad \dots\dots (\text{答})$$

2.

(1)

$$C_1 : x^2 + (y - 5)^2 = 16 \quad \dots\dots ①$$

$$C_2 : y = \frac{1}{4}x^2 \quad \therefore x^2 = 4y \quad \dots\dots ②$$

②を①に代入すると、

$$4y + (y^2 - 10y + 25) = 16$$

$$y^2 - 6y + 9 = 0$$

$$(y - 3)^2 = 0$$

$$y = 3$$

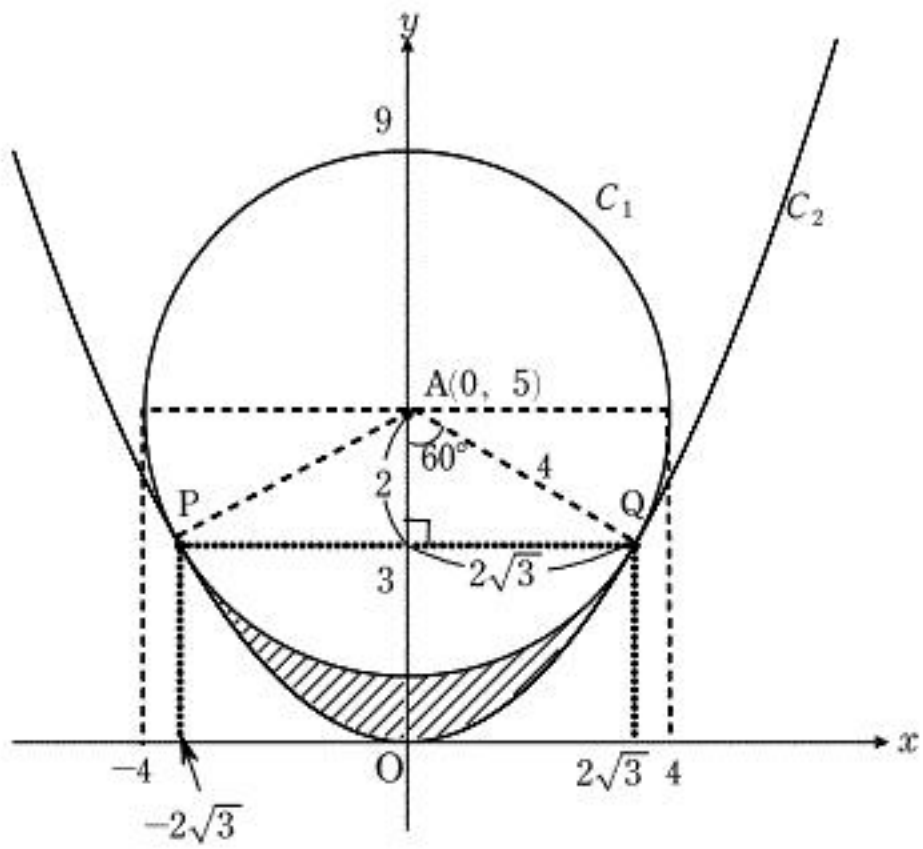
②に代入して

$$x = \pm 2\sqrt{3}$$

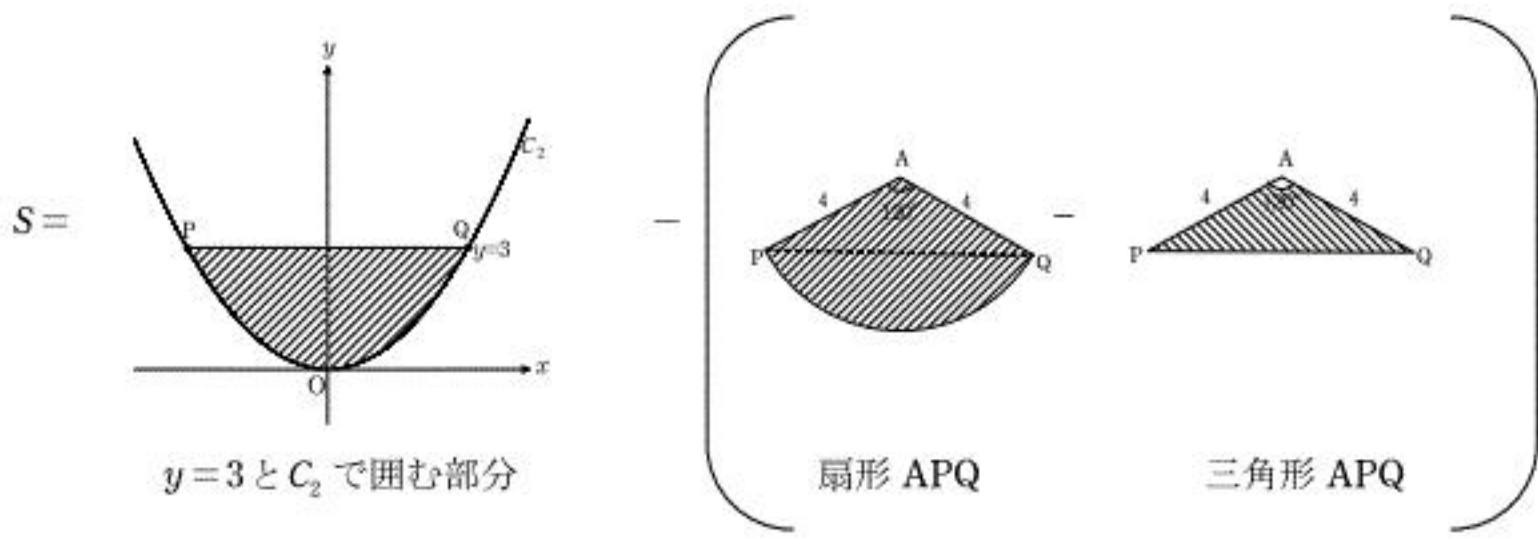
よって、求める交点は

$$\underline{(\pm 2\sqrt{3}, 3)} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2)



(3) 求める面積を S とすると、 S は



$$\begin{aligned}
 &= \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(3 - \frac{1}{4}x^2 \right) dx - \left(4^2 \pi \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ \right) \\
 &= 8\sqrt{3} - \left(\frac{16}{3} \pi - 4\sqrt{3} \right) \\
 &= \underline{12\sqrt{3} - \frac{16}{3} \pi} \quad \dots\dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

3.

(1) B, C の目の組み合わせは $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$

のいずれも 2 以下の場合なので,

$$2 \times 2 = \underline{4 \text{ 通り}} \dots\dots (\text{答})$$

(2)

A の目が 2 のとき B, C の目はいずれも 1 の 1 通り

A の目が 3 のとき B, C の目はいずれも 2 以下の $2^2 = 4$ 通り

A の目が 4 のとき B, C の目はいずれも 3 以下の $3^2 = 9$ 通り

A の目が 5 のとき B, C の目はいずれも 4 以下の $4^2 = 16$ 通り

A の目が 6 のとき B, C の目はいずれも 5 以下の $5^2 = 25$ 通り

よって,

$$\sum_{k=1}^5 k^2 = \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11 = \underline{55 \text{ 通り}} \dots\dots (\text{答})$$

(3) (2) と同様に, B, C が勝つ場合を考えて,

$$55 \times 3 = \underline{165 \text{ 通り}} \dots\dots (\text{答})$$

(4)

(i) 1 回目で 3 人が残り, 2 回目で勝者が決まる場合,

1 回目に 3 人が残るのは, A, B, C の目の組み合わせが

$(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6)$ の 6 通り.

2 回目に 3 人から 1 人の勝者が決まるのは, (3) より, 165 通り.

よって, $6 \times 165 = 990$ 通り.

(ii) 1 回目で 2 人が残り, 2 回目で勝者が決まる場合,

1 回目に 2 人が残るのは, $x_1 < x_2 = x_3$ となるとき,

この目の組み合わせは 1 から 6 の目から任意に 2 つの目を選び, 大きい目を重複させ, 小さい順に並べる場合と同じなので,

$${}_6C_2 \cdot 1 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot 1 = 15 \text{ 通り}.$$

どの 2 人が残るかは, ${}_3C_2 = 3$ 通り.

2 回目で勝者が決まる組み合わせは,

$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ 以外の 30 通り.

よって, $15 \times 3 \times 30 = 1350$ 通り.

以上(i) (ii)より,

$$990 + 1350 = \underline{2340 \text{ 通り}} \dots\dots (\text{答})$$