

1.

(1)

$$\begin{aligned}
 z_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1}i \\
 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4}a_n - \frac{\sqrt{6}}{4}b_n \right) + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}a_n + \frac{\sqrt{2}}{4}b_n \right)i \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4}(a_n - \sqrt{3}b_n) + \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}a_n + b_n)i \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \underbrace{(a_n + b_n i)}_{z_n}
 \end{aligned}$$

よって,

$$z_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) z_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \dots\dots ①$$

$$\therefore w = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3}i), |w| = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots\dots (\text{答})$$

(2) ①より,

$$\text{点 } z_{n+1} \text{ は点 } z_n \text{ を原点を中心に } \frac{\pi}{3} \text{ 回転し, } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 倍に縮小した点 } \dots\dots (\text{答})$$

(3)

$$z_{n+1} = wz_n \quad (z_1 = a_1 + b_1i = 2 + 2i) \text{ より,}$$

$$\begin{aligned}
 z_n &= w^{n-1} z_1 \\
 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{n-1} (2 + 2i)
 \end{aligned}$$

ド・モアブルの定理

$$= 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \left\{ \cos \frac{(n-1)\pi}{3} + i \sin \frac{(n-1)\pi}{3} \right\} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

積和の公式より

$$= 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \left\{ \cos \left(\frac{n\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{n\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \right) \right\}$$

複素数相等の定理より,

$$\begin{cases}
 a_n = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \cos \left(\frac{n\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \right) \\
 b_n = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \sin \left(\frac{n\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \right)
 \end{cases} \dots\dots (\text{答})$$

(4)

 $T_n \sim T_{n+1}$ より, 面積比は,

$$1 : \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1 : \frac{1}{2}$$

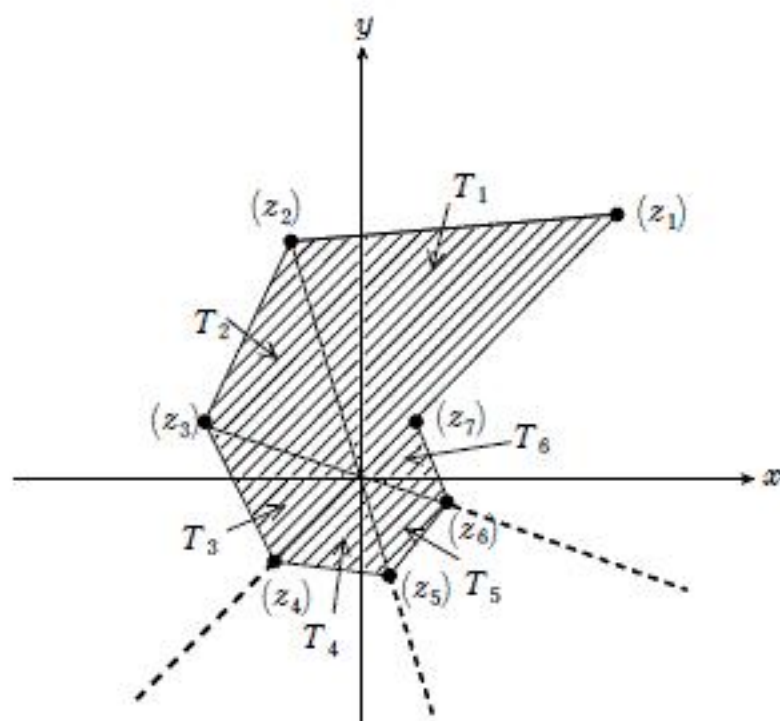
$T_7, T_8, T_9, \dots$ は全て $T_1 \sim T_6$ の上に重なるだけだから
求める領域の面積を S とおくと,

 $S = (T_1 \sim T_6 \text{ までの面積の和})$

$$= \frac{\sqrt{6} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^6 \right\}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{63\sqrt{6}}{32} \dots\dots (\text{答})$$

$$\left(T_1 \text{ の面積} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{|z_1|} \cdot \frac{2}{|z_2|} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{6}$$



2.

(1) 曲線 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上の点 P を

$P(2\cos\theta, \sin\theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) とおく.

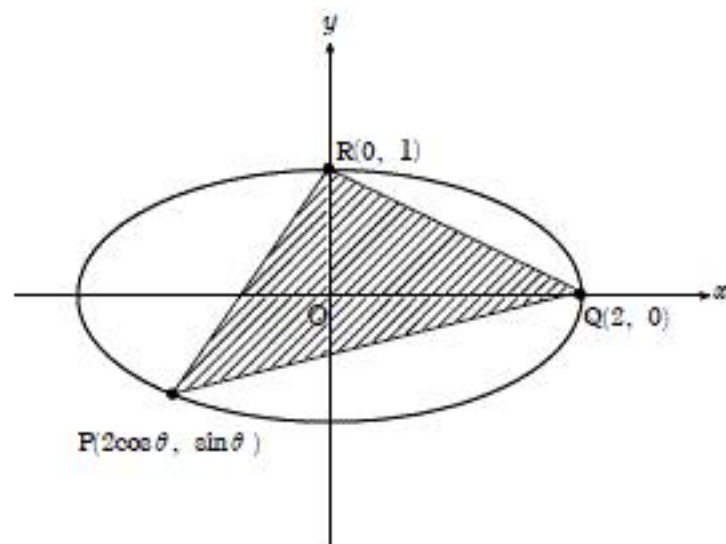
$\overrightarrow{PQ} = (2 - 2\cos\theta, -\sin\theta)$
 $\overrightarrow{PR} = (-2\cos\theta, 1 - \sin\theta)$ より,

($\triangle PQR$ の面積) $= S(\theta)$ とおくと,

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2} |2(1 - \cos\theta)(1 - \sin\theta) - \sin\theta \cdot 2\cos\theta| \\ &= |1 - (\sin\theta + \cos\theta)| \\ &= \left| 1 - \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \sqrt{2} + 1 \quad (\text{最大値}) \end{aligned}$$

$$\left(\theta = \frac{5}{4}\pi \text{ のとき} \right)$$

$$\therefore (S(\theta) \text{ の最大値}) = S\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \sqrt{2} + 1, P\left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \dots\dots (\text{答})$$

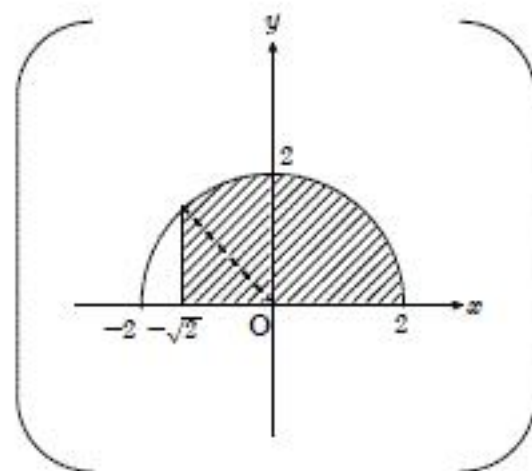


(2) 直線 PQ の方程式は,

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}(x - 2) \iff y = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}x - \sqrt{2} + 1$$

求める面積を T とおくと,

$$\begin{aligned} T &= \int_{-\sqrt{2}}^2 \left\{ \frac{\sqrt{2} - 1}{2}x - \sqrt{2} + 1 - \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right) \right\} dx \\ &= \left[\frac{\sqrt{2} - 1}{4}x^2 + (1 - \sqrt{2})x \right]_{-\sqrt{2}}^2 + \int_{-\sqrt{2}}^2 \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{3}{4}\pi + \frac{(\sqrt{2})^2}{2} \right] \\ &= \frac{3}{4}\pi - \frac{\sqrt{2}}{2} \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$



3.

(1)

$$25x + 9y = 1 \quad \dots\dots ①$$

$$25 \cdot (-5) + 9 \cdot 14 = 1 \quad \dots\dots ②$$

②より、 $(x, y) = (-5, 14)$ は①をみたす1組の整数解である。

ここで、①-②： $25(x+5) = 9(14-y)$

25と9は互いに素な整数だから、

$$\begin{cases} x+5 = 9k \\ 14-y = 25k \end{cases} \quad (k: \text{整数})$$

$$\therefore \underline{(x, y) = (9k-5, 14-25k)} \quad (k: \text{整数}) \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2)

$$25x + 9y = 33 \quad \dots\dots ③$$

$$25 \cdot 6 + 9 \cdot (-13) = 33 \quad \dots\dots ④$$

④より、 $(x, y) = (6, -13)$ は③をみたす1組の整数解である。

ここで、③-④： $9(y+13) = 25(6-x)$

(1)と同様にして、

$$\begin{cases} 6-x = 9l \\ y+13 = 25l \end{cases} \quad (l: \text{整数})$$

$$\therefore \underline{(x, y) = (6-9l, 25l-13)} \quad (l: \text{整数}) \quad \dots\dots (\text{答})$$

これより、

$$\begin{aligned} |x+y| &= |(6-9l) + (25l-13)| \\ &= |16l-7| \end{aligned}$$

$l=0$ で最小となるので、このとき $\underline{(x, y) = (6, -13)}$ $\dots\dots (\text{答})$

(3)

$$xy = -570$$

$$\iff (6-9l)(25l-13) = -570 \quad \leftarrow (2) \text{ の } (x, y) = (6-9l, 25l-13) \text{ を利用}$$

$$\iff 75l^2 - 89l - 164 = 0$$

$$\iff (l+1)(75l-164) = 0$$

$$\therefore l = -1 \quad (\text{整数})$$

$$\therefore \underline{(x, y) = (15, -38)} \quad \dots\dots (\text{答})$$

4.

(1)

$$f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - ax^2 \quad (a > 0) \leftarrow (\text{偶関数より, } x \geq 0 \text{ で調べる})$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - 2ax \\ &= \frac{2x(1-a\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

(i) $0 < a < 1$ のとき

x	0	...	$\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	...	$(+\infty)$
$f'(x)$	(0)	+	0	-	
$f(x)$	2	↗	(極大)	↘	$(-\infty)$

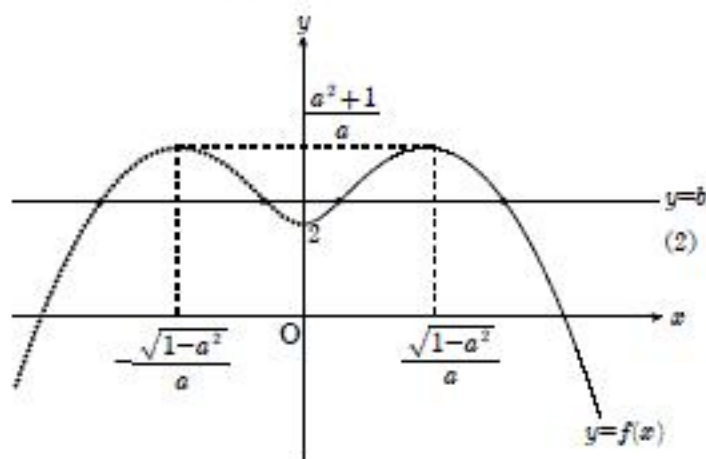
$$(\text{最大値}) = f\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\right) = \frac{a^2+1}{a}$$

(ii) $a \geq 1$ のとき $x \geq 0$ で $f'(x) \leq 0$ となり, $f(x)$ は x における単調減少.

$$(\text{最大値}) = f(0) = 2$$

以上(i), (ii)をまとめて,

$$(\text{最大値}) = \begin{cases} \frac{a^2+1}{a} & (0 < a < 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (a \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases} \dots\dots(\text{答})$$

(2) (1)より, $0 < a < 1$ において, $2 < b < \frac{a^2+1}{a}$ のとき, $f(x) = b$ の異なる実数解の個数は 4 個となり, 最大.

以下の領域を図示すればよい.

$$\begin{cases} b > 2 \\ b < a + \frac{1}{a} \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

ここで, $g(a) = b = a + \frac{1}{a}$ ($0 < a < 1$) を調べると,

$$b' = 1 - \frac{1}{a^2} = \frac{a^2-1}{a^2} < 0 \text{ より, 単調減少. } \lim_{a \rightarrow +0} b = +\infty, g(1) = 2$$

よって, 点 (a, b) の領域は右図の斜線部分 (境界は含まず).