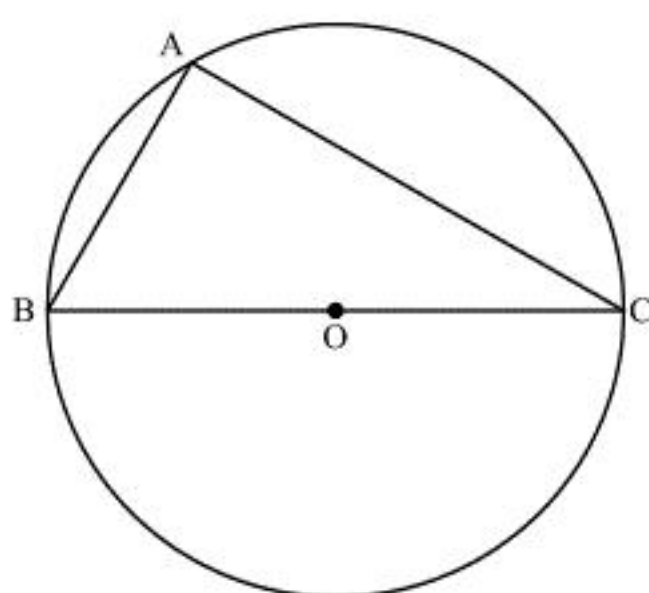


1.

(1)



点Oは△ABCの外心であるから、円周角の定理より、

$$\begin{aligned}\angle BOC &= 2\angle A \\ &= \pi\end{aligned}$$

となる。よって、3点B, O, Cはこの順に同一直線上に並び、線分BOと線分COの長さは等しいから、

$$\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

となる。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

であり、 $\angle A \neq \frac{\pi}{2}$ のとき線分BCは△ABCの外接円の直径ではない。よって、3点B, O, Cは同一直線上に存在せず、

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \neq \vec{0}$$

となる。また、

$$|\overrightarrow{BC}| \neq 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$$

である。①より、線分BOと線分COの長さが等しいことに注意すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。以上のことから、 $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ となる。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OH}\end{aligned}$$

である。これと、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ &= \left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= (\cos\theta, \sin\theta - \sqrt{2})\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{GH}|^2 &= \frac{4}{9}|\overrightarrow{OH}|^2 \\ &= \frac{4}{9} \left\{ \cos^2\theta + (\sin\theta - \sqrt{2})^2 \right\} \\ &= \frac{4}{9} (3 - 2\sqrt{2}\sin\theta) \quad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)\end{aligned}$$

となる。したがって、 $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ より、 $\sin\theta = -1$ のとき、すなわち、 $\theta = \frac{3}{2}\pi$ のとき、最大値

$$|\overrightarrow{GH}|^2 = \frac{4}{9}(3 + 2\sqrt{2})$$

をとり、 $\sin\theta = 1$ のとき、すなわち、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、最小値

$$|\overrightarrow{GH}|^2 = \frac{4}{9}(3 - 2\sqrt{2})$$

をとる。 $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき $\overrightarrow{OA} = (0, 1)$ 、 $\theta = \frac{3}{2}\pi$ のとき $\overrightarrow{OA} = (0, -1)$ であり、これらは $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ と一致しないため、適当である。

(答) 最大値: $\frac{4}{9}(3 + 2\sqrt{2})$ 、最小値: $\frac{4}{9}(3 - 2\sqrt{2})$

2.

(1)

底の変換公式より,

$$\begin{aligned}\log_2 \sqrt{a} - \log_a 2 &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2 a - \frac{1}{\log_2 a} &= \frac{1}{2} (\because a \neq 1)\end{aligned}$$

となるので, $\log_2 a = A$ とおいて,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} A - \frac{1}{A} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow A^2 - A - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (A-2)(A+1) &= 0 \\ \therefore A &= -1, 2\end{aligned}$$

が得られる。これより, $a = \frac{1}{2}, 4$ となる。

(答) $a = \frac{1}{2}, 4$

(2)

(1)と同様に, $\log_2 a = A$ とおく。

(i) $A > 0$ のとき

$$\begin{aligned}\log_2 \sqrt{a} - \log_a 2 &\geq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow A^2 - A - 2 &\geq 0 \\ \therefore A &\leq -1, 2 \leq A\end{aligned}$$

となるので, $A > 0$ と合わせて, $A \geq 2$ が得られる。

(ii) $A < 0$ のとき

$$\begin{aligned}\log_2 \sqrt{a} - \log_a 2 &\geq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow A^2 - A - 2 &\leq 0 \\ \therefore -1 &\leq A \leq 2\end{aligned}$$

となるので, $A < 0$ と合わせて, $-1 \leq A < 0$ が得られる。

以上(i), (ii)より, $-1 \leq A < 0, 2 \leq A$ であるから, 求める a の範囲は,

$$\frac{1}{2} \leq a < 1, 4 \leq a$$

となる。

(答) $\frac{1}{2} \leq a < 1, 4 \leq a$

(3)

$$\begin{aligned}\log_b \sqrt{a} - \log_a b &\geq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_b a &\geq \log_a b + \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。 a と b^2 の大小関係について場合分けを行う。

[1] $a > b^2$ のとき

$$\frac{1}{2} \log_b a > \frac{1}{2} \log_b b^2 = 1 (\because b > 1)$$

であり, また

$$\log_a b + \frac{1}{2} < \log_a \sqrt{a} + \frac{1}{2} = 1 (\because a > 1, \sqrt{a} > b)$$

である。これは①を満たす。

[2] $a = b^2$ のとき

$$\frac{1}{2} \log_b a = \frac{1}{2} \log_b b^2 = 1$$

であり, また

$$\log_a b + \frac{1}{2} = \log_a \sqrt{a} + \frac{1}{2} = 1$$

である。これは①を満たす。

[3] $a < b^2$ であるとき

$$\frac{1}{2} \log_b a < \frac{1}{2} \log_b b^2 = 1 (\because b > 1)$$

であり, また

$$\log_a b + \frac{1}{2} > \log_a \sqrt{a} + \frac{1}{2} = 1 (\because a > 1, \sqrt{a} < b)$$

である。これは①を満たさない。

以上[1], [2], [3]より①を満たす a, b^2 の大小関係は $a \geq b^2$ である。

(答) $a \geq b^2$

(4)

a, b が1でない自然数であることから $a > 1, b > 1$ であり, このとき(3)より,

$$\log_b \sqrt{a} - \log_a b \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow a \geq b^2$$

である。したがって $a+b \leq 8$ かつ $a \geq b^2$ を満たす自然数 (a, b) を求めればよい。 $b=2$ のとき

$$(a, b) = (4, 2), (5, 2), (6, 2)$$

であり, $b \geq 3$ のときは $b^2 \geq 9$ より $a \geq 9$ であるので, $a+b \leq 8$ となる自然数 (a, b) は存在しない。したがって条件を満たす自然数 (a, b) は

$$(a, b) = (4, 2), (5, 2), (6, 2)$$

である。

(答) $(a, b) = (4, 2), (5, 2), (6, 2)$

3.

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= |x-1| + \int_0^2 xf(t)dt \\ &= |x-1| + x \int_0^2 f(t)dt \\ &= |x-1| + ax \end{aligned}$$

であるから、 $x=2$ を代入することで

$$f(2) = |2-1| + 2a = 2a+1$$

と求まる。

(答) $f(2) = 2a+1$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1) + ax = (a-1)x + 1 & (x \leq 1) \\ (x-1) + ax = (a+1)x - 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

より、

$$\begin{aligned} a &= \int_0^2 f(t)dt \\ &= \int_0^1 \{(a-1)t + 1\}dt + \int_1^2 \{(a+1)t - 1\}dt \\ &= \left[\frac{a-1}{2}t^2 + t \right]_0^1 + \left[\frac{a+1}{2}t^2 - t \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{a-1}{2} \cdot 1 + 1 \right) - 0 + \left(\frac{a+1}{2} \cdot 2^2 - 2 \right) - \left(\frac{a+1}{2} \cdot 1 - 1 \right) \\ &= 2a+1 \\ \therefore a &= -1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = -1$

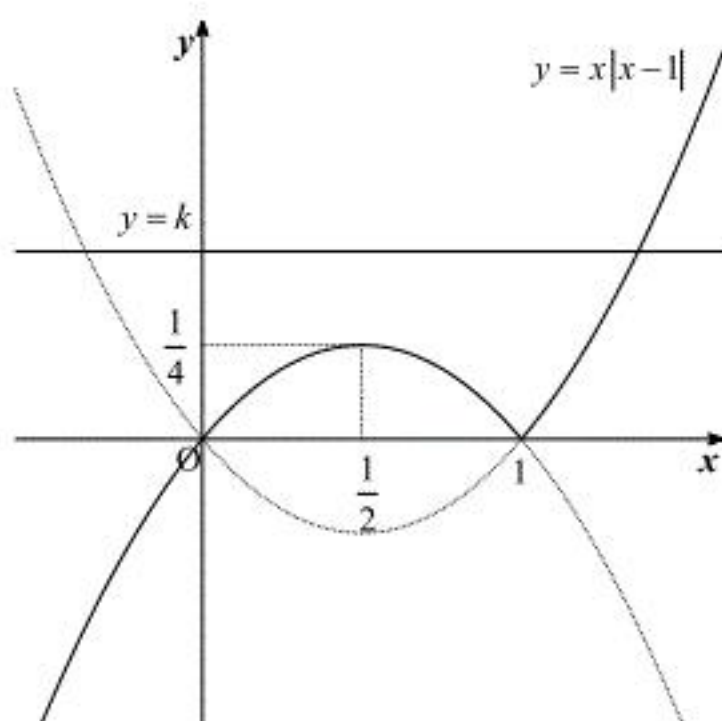
(3)

$$\begin{aligned} xf(x) - k &= ax^2 \\ \Leftrightarrow x|x-1| + ax^2 - k &= ax^2 \\ \Leftrightarrow x|x-1| &= k \end{aligned}$$

であるから、求める共有点の個数は、 $y = x|x-1|$ と $y = k$ のグラフの共有点の個数に等しい。

$$x|x-1| = \begin{cases} -x(x-1) & (x \leq 1) \\ x(x-1) & (x \geq 1) \end{cases}$$

より、 $y = x|x-1|$ と $y = k$ のグラフは以下のようなになる。



したがって、求める共有点の個数は

$$\begin{cases} 3 \text{ 個} & (0 < k < \frac{1}{4}) \\ 2 \text{ 個} & (k = 0, \frac{1}{4}) \\ 1 \text{ 個} & (k < 0, k > \frac{1}{4}) \end{cases}$$

である。

(答) 前述