

$$(1) \quad l_1: y = ax + b, l_2: y = cx + d$$

が一致するためには

$$a = c \quad \text{かつ} \quad b = d$$

それぞれの確率は $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ なので

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$(2) \quad l_1 \text{ と } l_2 \text{ が 1 点で交わるためには } l_1 \nparallel l_2$$

つまり $a \neq c$ のときなので

$$1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$$

$$(3) \quad l_1 \text{ と } l_2 \text{ の共有点の } x \text{ 座標は}$$

$$ax + b = cx + d$$

$$(a - c)x = d - b$$

$a \neq c$ より

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

$a - c$ の値, $d - b$ の値は下表のとおり.

$a \setminus c$	1	2	3	4	5	6
1	0	-1	-2	-3	-4	-5
2	1	0	-1	-2	-3	-4
3	2	1	0	-1	-2	-3
4	3	2	1	0	-1	-2
5	4	3	2	1	0	-1
6	5	4	3	2	1	0

$d \setminus b$	1	2	3	4	5	6
1	0	-1	-2	-3	-4	-5
2	1	0	-1	-2	-3	-4
3	2	1	0	-1	-2	-3
4	3	2	1	0	-1	-2
5	4	3	2	1	0	-1
6	5	4	3	2	1	0

$x = \frac{d - b}{a - c}$ が整数のとき y の値も整数となるので

$x = \frac{d - b}{a - c}$ が整数となるとよい.

(i) $a - c = \pm 1$ のとき $d - b$ は任意なので

$$\frac{10}{36} \times \frac{36}{36} = \frac{5}{18} \times \frac{18}{18} = \frac{5 \times 9}{18 \times 9}$$

(ii) $a - c = \pm 2$ のとき $d - b = 0, \pm 2, \pm 4$ であればよいので

$$\frac{8}{36} \times \frac{18}{36} = \frac{4}{18} \times \frac{9}{18} = \frac{2 \times 9}{9 \times 18}$$

(iii) $a - c = \pm 3$ のとき $d - b = 0, \pm 3$ であればよいので

$$\frac{6}{36} \times \frac{12}{36} = \frac{3}{18} \times \frac{6}{18} = \frac{3 \times 3}{18 \times 9}$$

(iv) $a - c = \pm 4$ のとき $d - b = 0, \pm 4$ であればよいので

$$\frac{4}{36} \times \frac{10}{36} = \frac{2}{18} \times \frac{5}{18} = \frac{1 \times 5}{9 \times 18}$$

(v) $a - c = \pm 5$ のとき $d - b = 0, \pm 5$ であればよいので

$$\frac{2}{36} \times \frac{8}{36} = \frac{1}{18} \times \frac{4}{18} = \frac{1 \times 2}{9 \times 18}$$

ゆえに求める確率は

$$\frac{45 + 18 + 9 + 5 + 2}{18 \times 9} = \frac{79}{162}$$

$$(1) \begin{cases} C_1: y = e^x \\ C_2: y = k\sqrt{x-a} \end{cases} \text{が共有点をもつためには}$$

$$e^x = k\sqrt{x-a} \quad (\text{根号内条件より } x > a)$$

$$\frac{e^x}{\sqrt{x-a}} = k$$

が実数解をもつとよい.

すなわち

$$\begin{cases} y = \frac{e^x}{\sqrt{x-a}} \\ y = k \end{cases}$$

が共有点をもつとよい.

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x-a}}$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x \cdot \sqrt{x-a} - e^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-a}}}{x-a} \\ &= \frac{2e^x(x-a) - e^x}{2(x-a)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{e^x(2x-2a-1)}{2(x-a)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

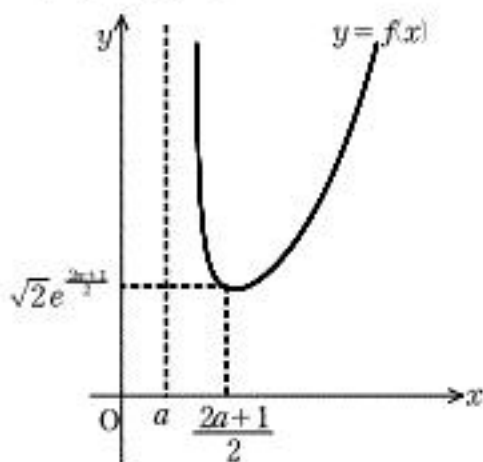
増減表は下表のとおり.

x	a	$\frac{2a+1}{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小 最小	$\nearrow$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$f\left(\frac{2a+1}{2}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{2a+1}{2}}$$

$y = f(x)$ のグラフは下のとおり.



ゆえに求める a, k が満たすべき条件は

$$k \geq \sqrt{2}e^{\frac{2a+1}{2}}$$

$$(2) \quad g(x) = e^x \text{ とおくと } \quad g'(x) = e^x$$

$$k(x) = k\sqrt{x-a} \text{ とおくと } k'(x) = \frac{k}{2\sqrt{x-a}}$$

$C_1: y = g(x)$ と $C_2: y = k(x)$ が共有点 $P(t, e^t)$ において

同一直線 l に接するためには

$$\begin{cases} g'(t) = k'(t) \\ g(t) = k(t) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} e^t = \frac{k}{2\sqrt{t-a}} & \cdots \cdots ① \\ e^t = k\sqrt{t-a} & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

①, ②より

$$\begin{aligned} k\sqrt{t-a} &= \frac{k}{2\sqrt{t-a}} \\ k(2t-2a-1) &= 0 \end{aligned}$$

$$(1) \text{より } k \geq \sqrt{2}e^{\frac{2a+1}{2}} > 0 \text{ なので}$$

$$2t-2a-1=0$$

$$a = t - \frac{1}{2}$$

②に代入して

$$\begin{aligned} e^t &= k\sqrt{\frac{1}{2}} \\ k &= \sqrt{2}e^t \end{aligned}$$

$$(3) \quad C_1: y = e^x \text{ 上の点 } P(t, e^t) \text{ における接線 } l \text{ は}$$

$$l: y = e^t(x-t) + e^t$$

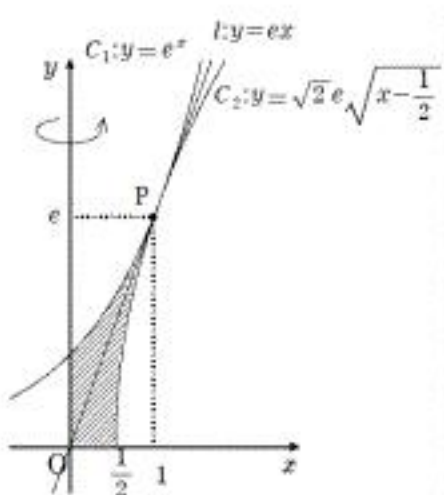
原点 $O(0, 0)$ を通るためには

$$0 = -e^t t + e^t$$

$e^t \neq 0$ より

$$0 = -t + 1$$

$$t = 1$$



$$y = e^t \text{ より } x = \log y$$

$$y = \sqrt{2}e\sqrt{x-\frac{1}{2}} \text{ より } x = \frac{1}{2e^2}y^2 + \frac{1}{2}$$

よって, 求める体積を V とおくと

$$\begin{aligned} V &= \int_0^e \left(\frac{1}{2e^2}y^2 + \frac{1}{2} \right) \pi dy - \int_1^e (\log y)^2 \pi dy \\ &= \frac{1}{4e^4} \pi \int_0^e (y^4 + 2e^2 y^2 + e^4) dy - \pi \int_1^e (\log y)^2 dy \end{aligned}$$

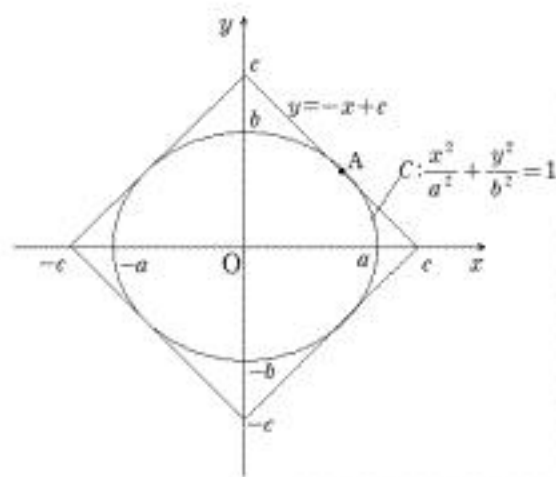
ここで,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^e (y^4 + 2e^2 y^2 + e^4) dy \\ &= \left[\frac{1}{5}y^5 + \frac{2e^2}{3}y^3 + e^4 y \right]_0^e \\ &= \frac{28}{15}e^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^e (\log y)^2 dy \\ &= \left[y \{ (\log y)^2 - 2 \log y + 2 \} \right]_1^e \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} V &= \left(\frac{7}{15}e - e + 2 \right) \pi \\ &= \left(2 - \frac{8}{15}e \right) \pi \end{aligned}$$



楕円 C と直線 $y = -x + c$ の接点を A とおく.

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{(-x+c)^2}{b^2} &= 1 \\ b^2x^2 + a^2(-x+c)^2 &= a^2b^2 \\ (a^2+b^2)x^2 - 2a^2cx + (a^2c^2 - a^2b^2) &= 0 \quad \cdots \cdots ①\end{aligned}$$

判別式を D とおくと

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (-a^2c)^2 - (a^2+b^2)(a^2c^2 - a^2b^2) = 0 \\ a^4b^2 - a^2b^2c^2 + a^2b^4 &= 0\end{aligned}$$

両辺を a^2b^2 ($\neq 0$) で割ると

$$\begin{aligned}a^2 - c^2 + b^2 &= 0 \\ c^2 &= a^2 + b^2 \quad \cdots \cdots ②\end{aligned}$$

このとき, ①より

$$x = \frac{a^2c}{a^2+b^2} = \frac{a^2c}{c^2} = \frac{a^2}{c}$$

$y = -x + c$ に代入して

$$y = -\frac{a^2}{c} + c$$

よって, 接点を A の座標は

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a^2}{c}, -\frac{a^2}{c} + c\right) \\ S &= 4 \cdot \frac{a^2}{c} \cdot \left(-\frac{a^2}{c} + c\right) \\ &= \frac{4a^2(c^2 - a^2)}{c^2} \\ &= \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2} \quad (\because ②)\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}T &= 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \pi ab\end{aligned}$$

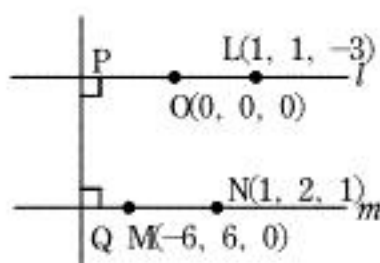
よって,

$$\begin{aligned}\frac{S}{T} &= \frac{\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}}{\pi ab} \\ &= \frac{4ab}{\pi(a^2+b^2)} \\ &= \frac{4}{\pi\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)} \\ &\leq \frac{4}{\pi \cdot 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}}} = \frac{2}{\pi} \quad (\because \text{相加・相乗平均の関係式})\end{aligned}$$

ただし, 等号は $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ のときのみ成立.

②とあわせて $a = b = \frac{c}{\sqrt{2}}$ のときのみ成立.

(1)



図のように座標を設定すると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= k\overrightarrow{OL} \\ &= \begin{pmatrix} k \\ k \\ -3k \end{pmatrix} \quad (\text{ただし, } k \text{ は実数})\end{aligned}$$

また $\overrightarrow{QM} = l\overrightarrow{MN}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OM} + l\overrightarrow{MN} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1+6 \\ 2-6 \\ 1-0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7l-6 \\ -4l+6 \\ l \end{pmatrix} \quad (\text{ただし, } l \text{ は実数})\end{aligned}$$

$$\text{ここで, } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 7l-6-k \\ -4l+6-k \\ l+3k \end{pmatrix}, \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OL}$ より

$$1 \cdot (7l-6-k) + 1 \cdot (-4l+6-k) - 3 \cdot (l+3k) = 0 \quad \therefore k=0$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 7l-6-k \\ -4l+6-k \\ l+3k \end{pmatrix}, \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{MN}$ より

$$7 \cdot (7l-6-k) - 4 \cdot (-4l+6-k) + 1 \cdot (l+3k) = 0 \quad \therefore l=1$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \therefore |\overrightarrow{PQ}| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{6}\end{aligned}$$

(2) (1) より,

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

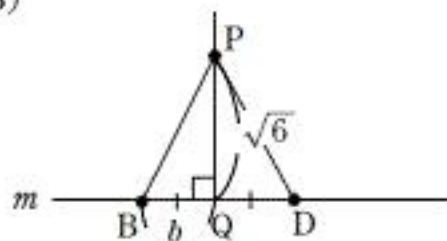
(1)と同様にして

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \begin{pmatrix} x \\ x \\ -3x \end{pmatrix} \quad (\text{ただし, } x \text{ は実数で } x \neq 0) \\ \overrightarrow{OB} &= \begin{pmatrix} 7y-6 \\ -4y+6 \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{ただし, } y \text{ は実数で } y \neq 0)\end{aligned}$$

とおける.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) \\ &= x(7y-6) + x(-4y+6) - 3x \cdot y \\ &= 0 \\ \therefore \angle APB &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(3)

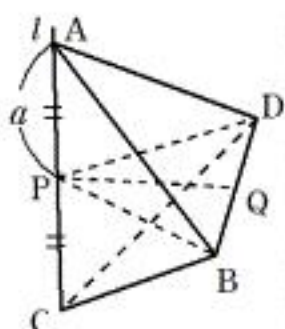


$$\begin{aligned}\triangle BDP \text{ の面積} &= \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{PQ}| \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2|\overrightarrow{QB}| \cdot |\overrightarrow{PQ}| \\ &= \sqrt{6}b\end{aligned}$$

(2)より, 任意の点 A, 点 B で $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ なので

$$l \perp \triangle BDP$$

すなわち, 四面体 ABCD は $\triangle BDP$ を底面とし, 高さ $|\overrightarrow{AP}|$ の三角錐が 2 つ合わさったものである.



$$\begin{aligned}\text{四面体 ABCD の体積} &= \frac{1}{3} \cdot \triangle BDP \text{ の面積} \cdot |\overrightarrow{AC}| \\ &= \frac{1}{3} \cdot \triangle BDP \text{ の面積} \cdot 2|\overrightarrow{PA}| \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{3}ab\end{aligned}$$