$\boxed{1}$

(1)

$(x,\ y)=(-2,\ 3)$ は解の1つである．すなわち

$$13x \quad\ \ +9y\ =1$$

$$13\cdot(-2)+9\cdot 3=1 \quad \cdots①$$

から辺々の差をとり

$$13(x+2)+9(y-3)=0$$

$$13(x+2)=9(3-y)$$

13，9 は互いに素であることより，k を整数として

$$x+2=9k\ ,\ \ 3-y=13k$$

$$x=9k-2,\ \ y=-13k+3 \quad \cdots（答）$$

(2)

t の2次方程式 $t(t+300)=20000$ を解くと

$$t^2+300t=20000$$

$$(t+150)^2=20000+150^2$$

$$t+150=\pm\sqrt{42500}=\pm\sqrt{5^2\cdot 17\cdot 10^2}=\pm 50\sqrt{17}$$

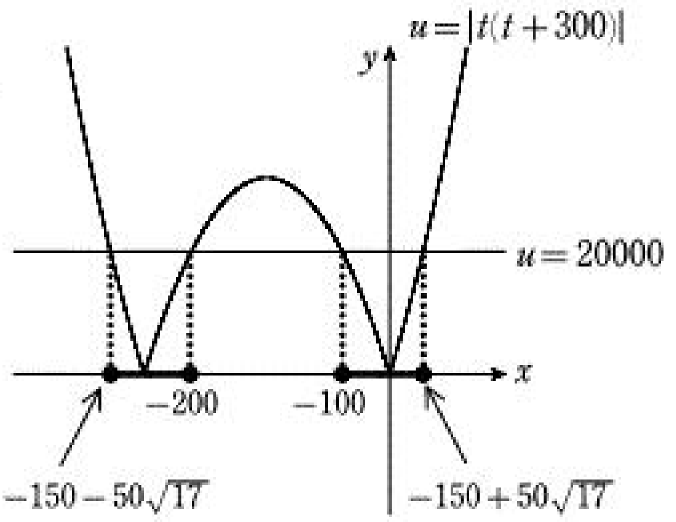
$$t=-150\pm 50\sqrt{17}$$

また，$t(t+300)=-20000$ を解くと

$$(t+150)^2=-20000+150^2$$

$$t+150=\pm\sqrt{2500}=\pm 50$$

$$t=-200,\ \ -100$$



すなわち，求める範囲は，図より

$$-150-50\sqrt{17}\leqq t\leqq -200,\ \ -100\leqq t\leqq -150+50\sqrt{17} \quad \cdots（答）$$

(3)

$4.12<\sqrt{17}<4.13$ より，$206<50\sqrt{17}<206.5$，すなわち

$$-356.5<-150-50\sqrt{17}<-356\ ,\ \ 56<-150+50\sqrt{17}<56.5$$

に注意して，(2) に含まれる整数 t の個数は

$$t=-356,\ -355,\ \cdots,\ -200 \text{ または } t=-100,\ -99,\ \cdots,\ 56$$

であり，不等式を満たす整数 t の個数は

$$\{-200-(-356)+1\}+\{56-(-100)+1\}=314 \quad \cdots（答）$$

(4)

13 で割ると 11 余り，9 で割ると 7 余るような整数 N は，整数 a，b により

$$N=13a+11=9b+7$$

と表される．このとき

$$13a-9b=-4$$

$$13a-9(b-1)=5$$

$$13a+9B=5 \quad \cdots② \quad (-(b-1)=B)$$

と書き換えられる．①より，②の解の1つは $(-2\times 5,\ 3\times 5)$ であり，

$$13a \quad\ \ +9B\ =5$$

$$13\cdot(-10)+9\cdot 15=5$$

の辺々を引くことで

$$13(a+10)+9(B-15)=0$$

$$13(a+10)=9(15-B)$$

13，9 は互いに素であることから，m を整数として

$$a+10=9m,\ \ 15-B=13m$$

と書き換えられる．すなわち

$$N=13(9m-10)+11=117m-119$$

である．この形で表される整数 N のうち，(2) の範囲に含まれるのは

$$N=-353,\ \ -236,\ \ -2$$

の3個であり，最小となるのは $N=-353$ $\cdots$（答）

$\boxed{2}$

(1)

$$f(1)=1-(2k+1)-(k^3-8k)+(k^3-6k)=0 \quad \cdots\text{（答）}$$

(2)

(1)の結果と因数定理により，$f(x)$ は $x-1$ を因数に持つ．すなわち

$$f(x)=(x-1)\{x^2-2kx+(-k^3+6k)\} \quad \cdots①$$

と変形できることから，$g(x)=x^2-2kx+(-k^3+6k)$ として

$$(\ f(x)=0 \text{ が虚数解をもつ}\ ) \iff (\ g(x)=0 \text{ が虚数解を持つ})$$

と読み替えられる．$g(x)=0$ の判別式を D とすれば，$\dfrac{D}{4}<0$ から

$$(-k)^2-(-k^3+6k)<0$$

$$k^3+k^2-6k<0$$

$$k(k^2+k-6)<0$$

$$k(k+3)(k-2)<0$$

$$k<-3,\ 0<k<2$$

$k\geqq 0$ より　$0<k<2$　$\cdots$（答）

(3)

$f(0)=k^3-6k$ であり，これを $h(k)$ とする．

$$h'(k)=3k^2-6=3(k-\sqrt{2})(k+\sqrt{2})$$

より，$k\geqq 0$ において $k=\sqrt{2}$ で $h(k)$ は極小かつ最小である．

すなわち，$h(k)$ の最小値は

$$h(\sqrt{2})=2\sqrt{2}-6\sqrt{2}=-4\sqrt{2}$$

である．　（証明終）

また，$k=\sqrt{2}$ のとき，①より

$$f(x)=(x-1)(x^2-2\sqrt{2}\,x+4\sqrt{2})$$

であり，$x^2-2\sqrt{2}\,x+4\sqrt{2}=0$　$\cdots$②　の判別式を D' とすれば

$$\frac{D'}{4}=(-\sqrt{2})^2-4\sqrt{2}=2-4\sqrt{2}<0$$

すなわち，方程式②は実数解を持たない．

以上より，$k=\sqrt{2}$ のとき，$f(x)=0$ の異なる実数解の個数は 1 個．　$\cdots$（答）

$\boxed{3}$

(1)

$$\theta_4=\frac{\theta_2+\theta_3}{2}+\pi=\frac{3}{4}\pi+\pi=\frac{7}{4}\pi \quad \cdots(答)$$

また，

$$\theta_5=\frac{\theta_3+\theta_4}{2}+\pi=\frac{35}{24}\pi+\pi=\frac{59}{24}\pi \quad \cdots(答)$$

(2)

与条件より，$\theta_{n+2}=\dfrac{\theta_{n+1}+\theta_n}{2}+\pi$ の関係がある．これより

$$\begin{aligned}\beta_{n+1}&=\theta_{n+2}-\theta_{n+1}\\&=\left(\frac{\theta_{n+1}+\theta_n}{2}+\pi\right)-\theta_{n+1}\\&=-\frac{\theta_{n+1}}{2}+\frac{\theta_n}{2}+\pi\\&=-\frac{1}{2}(\theta_{n+1}-\theta_n)+\pi\\&=-\frac{1}{2}\beta_n+\pi \qquad (証明終)\end{aligned}$$

また，$\beta_1=\theta_2-\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$ であることより

$$\beta_{n+1}=-\frac{1}{2}\beta_n+\pi$$

$$\beta_{n+1}-\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}\left(\beta_n-\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\beta_n-\frac{2}{3}\pi=-\frac{\pi}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\beta_n=\frac{\pi}{3}\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \quad \cdots(答)$$

(3)

$\theta_{n+1}-\theta_n=\dfrac{\pi}{3}\left\{2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$，$\theta_1=0$ より，$n\geqq 2$ で

$$\begin{aligned}\theta_n&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi}{3}\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}\\&=\frac{\pi}{3}\left\{2(n-1)-\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right\}\\&=\frac{\pi}{3}\left\{2(n-1)-\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\right\}\\&=\frac{\pi}{3}\left\{2n+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{8}{3}\right\}\end{aligned}$$

であり，$n=1$ でもこの式は成立する．ゆえに　$\theta_n=\dfrac{\pi}{3}\left\{2n+\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-\dfrac{8}{3}\right\}$　$\cdots$(答)