$\boxed{1}$

(1)

z の 2 次方程式 $z^2-2kz+1=0$ の判別式を D として，$\dfrac{D}{4}<0$ から

$$(-k)^2-1<0$$

$$(k-1)(k+1)<0$$

kは正の定数より，

$$0<k<1 \quad \cdots \text{（答）}$$

また，与方程式の，虚部が正の虚数解 α は

$$\alpha=k+\sqrt{k^2-1}=k+i\sqrt{1-k^2}$$

であることより

$$|\alpha|=\sqrt{k^2+(1-k^2)}=1 \quad \cdots \text{（答）}$$

(2)

加法定理より

$$\cos\frac{5}{12}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \cdots \text{（答）}$$

(3)

α の偏角 θ を$\arg\alpha$ と表す．$\arg\alpha=\theta$ より

$$\arg\alpha^3=3\theta\,,\quad \arg\alpha^6=6\theta$$

である．

ここで，α の虚部が正であることから，$0<\theta<\pi$，すなわち，

$$0<3\theta<3\pi,\ 0<6\theta<6\pi$$

である．α^3 が第 3 象限にあることより

$$\pi<3\theta<\frac{3}{2}\pi \qquad \therefore\ \frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2} \quad \cdots ①$$

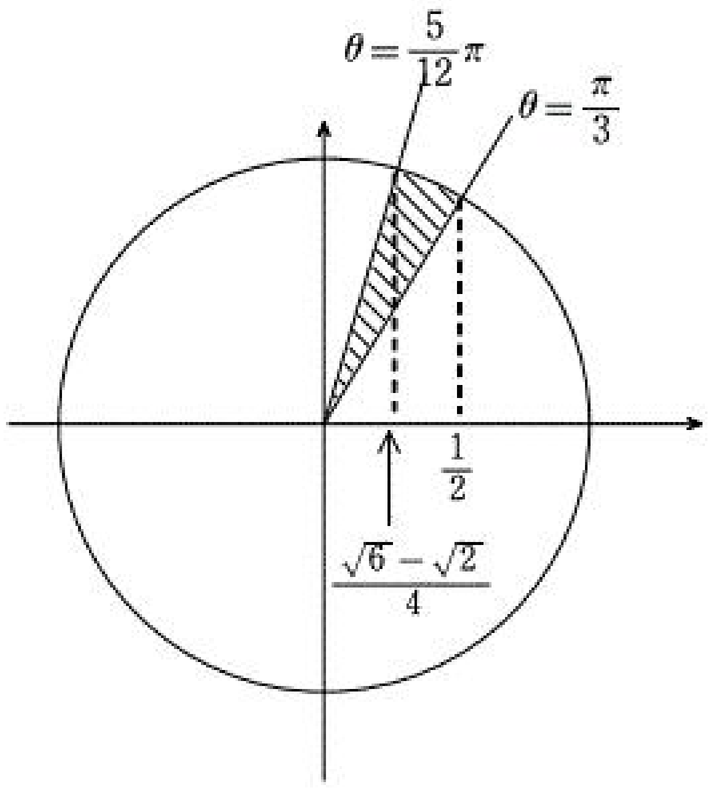
①の下で，α^6 が第 1 象限にあることより

$$2\pi<6\theta<\frac{5}{2}\pi \qquad \therefore\ \frac{\pi}{3}<\theta<\frac{5}{12}\pi \quad \cdots ②$$

すなわち，θ の範囲は　$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{5}{12}\pi$　…（答）

また，$|\alpha|=1$ より，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ と表される．(1) とあわせ，$k=\cos\theta$ である．ゆえに

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}<k<\frac{1}{2} \quad \cdots \text{（答）}$$

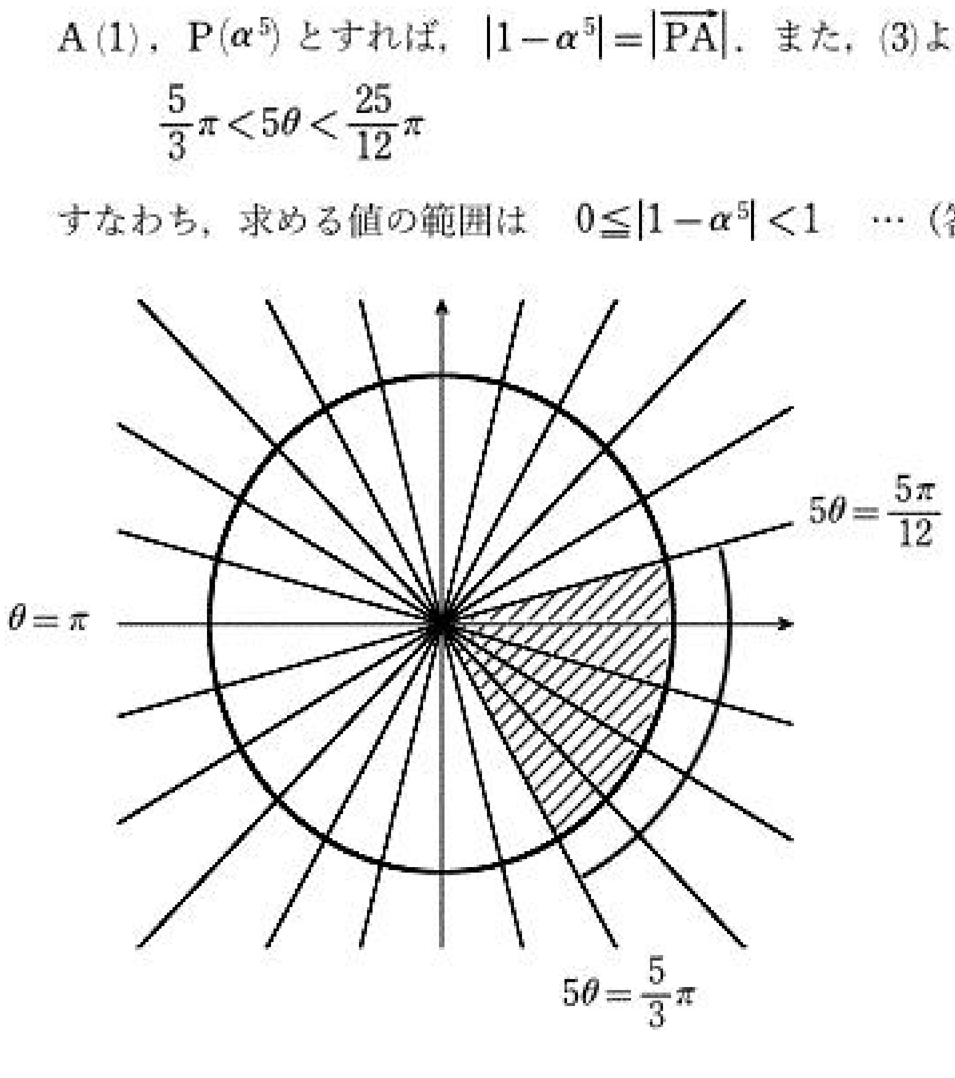


(4)

A(1)，P(α^5) とすれば，$|1-\alpha^5|=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$．また，(3)より

$$\frac{5}{3}\pi<5\theta<\frac{25}{12}\pi$$

すなわち，求める値の範囲は　$0\leqq|1-\alpha^5|<1$　…（答）



$\boxed{2}$

(1)

曲線 C_1，C_2 の式を，それぞれ

$$C_1:\ f(x)=\sqrt{x}-4\ ,\quad C_2:\ g(x)=-\sqrt{1-x}$$

とする．

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ ,\quad f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}<0$$

ゆえに，$y=f(x)$ は $x>0$ で上に凸である．　（証明終）

(2)

P$(s,\ t)$，Q$(x,\ y)$ とする．点 P は曲線 $y=f(x)$ 上の点であり

$$t=\sqrt{s}-4 \quad \cdots ①$$

また，線分 PQ の中点が点 F$\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$ であることより

$$\frac{s+x}{2}=\frac{1}{2} \quad \cdots ②,\qquad \frac{t+y}{2}=-2 \quad \cdots ③$$

ゆえに，条件①かつ②かつ③を満たす点 $(s,\ t)$ の存在する必要十分条件は

$$-4-y=\sqrt{1-x}-4 \quad \Longleftrightarrow \quad y=-\sqrt{1-x}$$

であり，これは点 Q が曲線 $y=g(x)$ 上全体を動くことを示す．　（証明終）

(3)

$f'(x_1)=\frac{1}{2\sqrt{x_1}}$ より，点 $(x_1,\ \sqrt{x_1}-4)$ における法線の方程式は

$$y-(\sqrt{x_1}-4)=-2\sqrt{x_1}(x-x_1)$$

この直線は点 F$\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$ を通ることから

$$-2-(\sqrt{x_1}-4)=-2\sqrt{x_1}\left(\frac{1}{2}-x_1\right)$$

$$2-\sqrt{x_1}=-\sqrt{x_1}+2(x_1)^{\frac{3}{2}}$$

$$x_1=1,\ \ y_1=\sqrt{x_1}-4=-3 \quad \cdots \text{（答）}$$

また，点A $(x_1,\ y_1)$ と点B $(x_2,\ y_2)$ は点 F に関して対称であることから，線分 AB の中点は点 F である．すなわち

$$\frac{1+x_2}{2}=\frac{1}{2},\ \ \frac{-3+y_2}{2}=-2$$

$$x_2=0,\ \ y_2=-1 \quad \cdots \text{（答）}$$

(4)

線分 X_1X_2 の長さが最小となるのは，線分 X_1X_2 と，曲線 $y=f(x)$ 上の点 X_1 における接線，また，曲線 $y=g(x)$ 上の点 X_2 における接線がそれぞれ垂直な位置に点を定めるときである．これは，点 X_1 が (3) の点 A，点 X_2 が (3) の点 B と一致するとき．すなわち，線分 X_1X_2 の長さの最小値は

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(0-1)^2+\{-1-(-3)\}^2}=\sqrt{5} \quad \cdots \text{（答）}$$

$\boxed{3}$

$(x,\ y)=(x(t),\ y(t))$ とするとき

$$(x(0),\ y(0))=(x(2\pi),\ y(2\pi))$$

であることより，$0\leqq t<2\pi$ について調べれば十分.

$$\frac{dx}{dt}=\cos t\ ,\quad \frac{dy}{dt}=-\sin t-\cos t=-\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

から，$x(t)$，$y(t)$ の増減は次表の通り.

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	(2π)
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$\frac{dy}{dt}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\searrow$	$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$	$\cdot$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$	$\cdot$	$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$	$\nearrow$	$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$	$\searrow$	$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

以上より，曲線 C_1 の概形は右下図の通り.

$x=0$ より

$$\sin t=0 \iff t=0,\ \pi$$

であり，対応する点は $(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$.

$y=0$ より

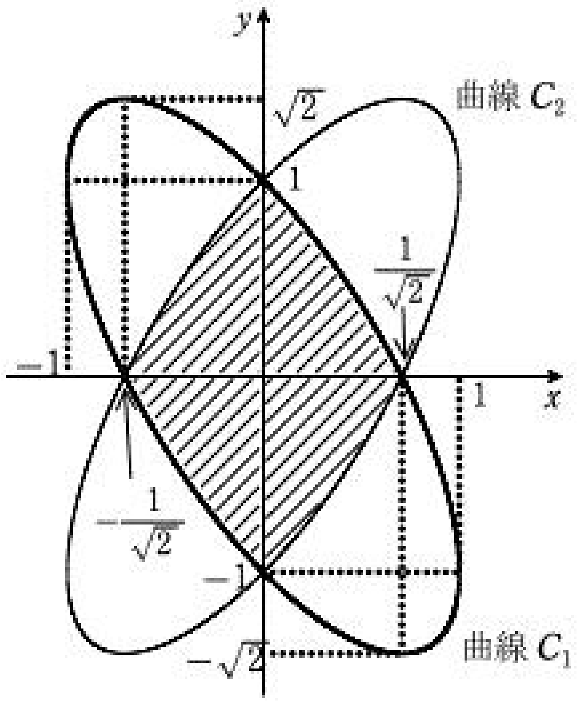
$$\cos t=\sin t$$

であり，$t=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$ は解ではないことから

$$\tan t=1 \iff t=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$

であり，対応する点は $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$，$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$.

ゆえに，面積を求める部分は図の斜線部.



求める面積 S は

$$\begin{aligned}
\frac{S}{4}&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t-\sin t)\cdot\cos t\,dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 t-\sin t\cos t)dt\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{(1+\cos 2t)-\sin 2t\}dt\\
&=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\
&=\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(1-0)+\frac{1}{2}(0-1)\right\}\\
&=\frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad S=\frac{\pi}{2}\quad\cdots(答)$$

(参考)

$$\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos t-\sin t\end{cases} \iff \begin{cases}\cos t=x+y\\ \sin t=x\end{cases}$$

から，この曲線の方程式は

$$(x+y)^2+x^2=1$$

$$2x^2+2xy+y^2=1$$

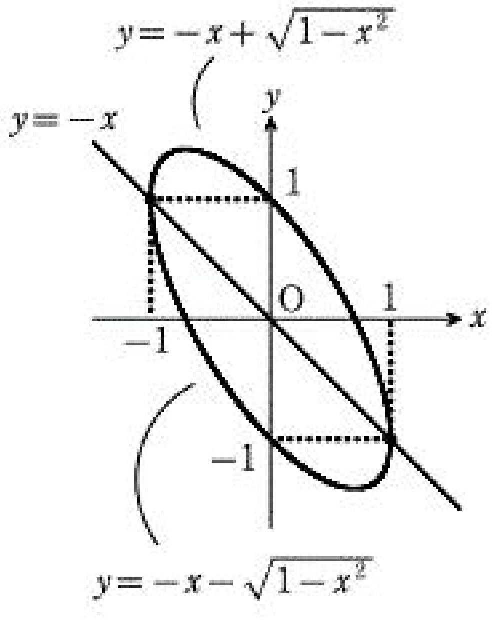
で与えられる．これを y について解くと

$$(y+x)^2=1-x^2$$

$$\iff\quad y+x=\pm\sqrt{1-x^2}\ \land\ 1-x^2\geqq 0$$

$$\iff\quad y=-x\pm\sqrt{1-x^2}\ \land\ -1\leqq x\leqq 1$$

であり，ここから曲線の概形を読み取ることも可能である.



$\boxed{4}$

(1) $p=3$, $n=2$ のとき，$1\leqq k\leqq 9$．この範囲の整数 k のうち，3 と互いに素な自然数は，1 から 9 の整数の集合から 3，6，9 を除いたものである．

$A=\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ …（答）

(2) 1 から p^n のうち p の倍数は p，$2p$，$3p$，…，$p^{n-1}\cdot p$

の，p^{n-1} 個である．すなわち，集合 A に属する整数の個数は　p^n-p^{n-1}（個）　…（答）

また，A に属する整数の和は

$$\sum_{k=1}^{p^n}k-p\sum_{k=1}^{p^{n-1}}k=\frac{p^n(p^n+1)}{2}-p\cdot\frac{p^{n-1}(p^{n-1}+1)}{2}$$

$$=\frac{p^n}{2}\{(p^n+1)-(p^{n-1}+1)\}$$

$$=\frac{1}{2}p^n(p^n-p^{n-1})\quad\cdots（答）$$

(3) A の要素 k に対し，x，y の方程式 $kx+p^ny=1$ の整数解を調べる．

k，p^n は互いに素であることから，問題文で与えられた条件より，この方程式は整数解 (x', y') を持ち，また，x' は p^n の倍数でない．

これより，$kx'+p^ny'=1$ が成り立つので，辺々の差をとることで

$k(x-x')+p^n(y-y')=0$

$k(x-x')=p^n(y'-y)$

を得る．k，p^n は互いに素であることより，m を整数として，(x, y) の一般解

$x-x'=p^nm$，$y'-y=km$

$x=p^nm+x'$，$y=-km+y'$　を得る．

ところで，この整数 x は

$\{p^n(m+1)+x'\}-(p^nm+x')=p^n$

から，連続する p^n 個の整数の中にただ 1 つ存在し，また，x' が p^n の倍数でないことより，集合 A に属する x はただ 1 つである．そのような x を $x=x_0$ とすれば

$kx_0+p^ny=1 \iff kx_0-1=p^n(-y)$

であり，これが求める l である．　（証明終）

(4) (3) より，A に属する整数 k に対して l の値はただ 1 つ定まり，これを l_k とする．また，このとき $kl_k-1=p^ny_k$，と表されるものとする．このとき $\dfrac{1}{k}=l_k-p^n\dfrac{y_k}{k}$　が成り立つ．

A に属するそれぞれの整数 k の値に対してこの等式を得るので，辺々の和をとることで

$$\sum_{k\in A}\frac{1}{k}=\sum_{k\in A}\left(l_k-p^n\frac{y_k}{k}\right)$$

ここで，異なる $k\in A$ に対して異なる $l_k\in A$ が対応することより　…(*)

$$\sum_{k\in A}l_k=\sum_{k\in A}k=\frac{1}{2}p^n(p^n-p^{n-1})$$

であり，また，$\displaystyle\sum_{k\in A}\frac{y_k}{k}=\frac{v}{u}$　（ただし，u，v は自然数，$u\fallingdotseq 1$，u，v は互いに素）とすることで

$$\sum_{k\in A}\left(l_k-p^n\frac{y_k}{k}\right)=\frac{1}{2}p^n(p^n-p^{n-1})-p^n\cdot\frac{v}{u}=p^n\left(\frac{p^n-p^{n-1}}{2}-\frac{v}{u}\right)$$

と表される．ここで，u は $k\in A$ を分母とした分数の和による値であり，u は p^n と互いに素である．

また，p^n，p^{n-1} の偶奇は一致していることから，p^n-p^{n-1} は偶数であり，$\dfrac{p^n-p^{n-1}}{2}$ は整数である．

以上から，$\displaystyle\sum_{k\in A}\frac{1}{k}$ を既約分数で表すとき，分子は p^n の倍数である．　（証明終）

ただし，(*) は次のよう説明される．

異なる $k\in A$ に対して異なる $l\in A$ が対応することを示す．

k_1，$k_2\in A$，$1\leqq k_1<k_2\leqq p^n-1$ とする．このとき，m_1，m_2 を整数として

$k_1l-1=p^nm_1$，　$k_2l-1=p^nm_2$

が成り立つとする．辺々の差をとると

$(k_2-k_1)l=p^n(m_2-m_1)$

p^n と l は互いに素であることから，k_2-k_1 は p^n の倍数である．しかし，$1\leqq k_1<k_2\leqq p^n-1$ より，$1\leqq k_2-k_1\leqq p^n-2$ であり，k_2-k_1 は p^n の倍数でなく，矛盾する．

ゆえに，異なる $k\in A$ に対して等しい $l\in A$ が対応することを示した．