

条件を満たす自然数を n とおくと、整数 x, y を用いて、

$$n = 53x + 5 = 61y + 6$$

と表せる。従って、

$$53x + 5 = 61y + 6$$

$$\Leftrightarrow 53x - 61y = 1$$

$$\Leftrightarrow 53(x - y) - 8y = 1$$

$$\Leftrightarrow 5(x - y) + 8(6x - 7y) = 1$$

であり、 $5 \cdot (-3) + 8 \cdot 2 = 1$ となるため、

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 6x - 7y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -23 \\ y = -20 \end{cases}$$

を得る。

$$53x + 5 = 61y + 6$$

の両辺から

$$53 \cdot (-23) + 5 = 61 \cdot (-20) + 6$$

の両辺を引くと、

$$53 \cdot (x + 23) = 61 \cdot (y + 20)$$

を得る。53 と 61 は互いに素であるから、不定方程式 $53x + 5 = 61y + 6$ の一般解は整数 k を用いて、

$$\begin{cases} x + 23 = 61k \\ y + 20 = 53k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 61k - 23 \\ y = 53k - 20 \end{cases}$$

となる。このとき、

$$n = 53x + 5 = 3233k - 1214$$

が最小の自然数となるのは $k = 1$ のときで、最小値は $n = 2019$ である。

II

(1)

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{4\cos^2\theta - 4\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta + 4\cos\theta\sin\theta + 4\sin^2\theta} \\ &= \sqrt{5} \\ |\vec{b}| &= \sqrt{\cos^2\theta - 4\cos\theta\sin\theta + 4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta + 4\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

より、 $\vec{a}, \vec{b}$ は共に $\vec{0}$ でないから、 $\vec{a}, \vec{b}$ が垂直となる条件は、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ である。よって、

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow 10\sin\theta\cos\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 5\sin 2\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\theta &= \pi \quad (\because 0 < 2\theta < 2\pi) \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\frac{\pi}{2}$

(2)

$2\vec{a} + \vec{b} = (3\cos\theta, 4\cos\theta + 5\sin\theta)$ であるから、

$$\begin{aligned} |2\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{(3\cos\theta)^2 + (4\cos\theta + 5\sin\theta)^2} \\ &= \sqrt{25\cos^2\theta + 25\sin^2\theta + 40\sin\theta\cos\theta} \\ &= \sqrt{25 + 20\sin 2\theta} \end{aligned}$$

となる。 $0 < 2\theta < 2\pi$ において、 $\sin 2\theta$ のとりうる値の範囲は

$$-1 \leq \sin 2\theta \leq 1$$

であるから、 $|2\vec{a} + \vec{b}|$ のとりうる値の範囲は、

$$\begin{aligned} \sqrt{25-20} &\leq |2\vec{a} + \vec{b}| \leq \sqrt{25+20} \\ \Leftrightarrow \sqrt{5} &\leq |2\vec{a} + \vec{b}| \leq 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\sqrt{25+20\sin 2\theta}, \sqrt{5} \leq |2\vec{a} + \vec{b}| \leq 3\sqrt{5}$

(3)

(1)の過程より、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5\sin 2\theta$ である。 $2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - k\vec{b}$ が垂直となる条件は、

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - k\vec{b}) = 0 \text{ かつ } 2\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{0} \text{ かつ } \vec{a} - k\vec{b} \neq \vec{0}$$

となるが(2)より、 $|2\vec{a} + \vec{b}| \neq 0$ であるから

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - k\vec{b}) = 0 \text{ かつ } \vec{a} - k\vec{b} \neq \vec{0}$$

を考えればよい。 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - k\vec{b}) = 0$ を変形し、 $\theta = \frac{5}{12}\pi$ を代入すると

$$\begin{aligned} (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - k\vec{b}) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 - k|\vec{b}|^2 + (-2k+1)\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow 10 - 5k + (-2k+1) \cdot 5\sin 2\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 10 - 5k + (-2k+1) \cdot 5 \cdot \sin \frac{5}{6}\pi &= 0 \\ \Leftrightarrow -10k + \frac{25}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} |\vec{a} - k\vec{b}| &= \sqrt{5 + 5k^2 - 10k\sin 2\theta} \\ &= \sqrt{5 + \frac{125}{16} - \frac{25}{4}} \\ &= \sqrt{5 + \frac{25}{16}} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

であり、これは $\vec{a} - k\vec{b} \neq \vec{0}$ を満たす。

(答) $\frac{5}{4}$

Ⅲ

(1)

A_n の x 座標を c_n とすると, $f'(x)=2x+b$ より, 点 $(c_n, c_n^2+bc_n+2)$ での接線の傾きは $2c_n+b$ である。 $2c_n+b=0 \Leftrightarrow c_n=-\frac{b}{2}$ のとき, 法線は y 軸と平行になり, 点 A_{n+1} が一意に定まらない。 よって, $c_n \neq -\frac{b}{2}$ であり, 法線の傾きは $-\frac{1}{2c_n+b}$ である。 したがって, 法線の方程式は

$$y = -\frac{1}{2c_n+b}x + \frac{c_n}{2c_n+b} + c_n^2 + bc_n + 2$$

であり, これより y 軸との交点の y 座標 a_{n+1} は,

$$a_{n+1} = \frac{c_n}{2c_n+b} + c_n^2 + bc_n + 2$$

であり,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{c_n}{2c_n+b}$$

と求まる。 数列 $\{a_n\}$ は公差 d の等差数列であるから, 任意の自然数 n について

$$\begin{aligned} \frac{c_n}{2c_n+b} &= d \\ \Leftrightarrow c_n &= d(2c_n+b) \left(\because c_n \neq -\frac{b}{2} \right) \\ \Leftrightarrow (2d-1)c_n &= bd \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。 $a_{n+1} - a_n = \frac{c_n}{2c_n+b} > 0$ より数列 $\{a_n\}$ は増加列であり, $f(x)$ は $x > 0$ で単調増加であるから, 数列 $\{c_n\}$ も増加列となる。 よって

$$n \neq m \Leftrightarrow c_n \neq c_m$$

が成り立つ。 $2d-1, bd$ は n によらず一定であるから, 任意の自然数 n について $\textcircled{1}$ が成り立つ条件は

$$\begin{cases} 2d-1=0 \\ bd=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ d=\frac{1}{2} \end{cases}$$

である。

(答) 0

(2)

(1)より, $d=\frac{1}{2}$ である。

(答) $\frac{1}{2}$

(3)

a の値は曲線 $y=x^2+2(x>0)$ 上の点の y 座標であるから, $a>2$ が必要である。 また, $a>2$ ならば先の議論より条件を満たす点列 $\{A_n\}$ が存在するため, $a>2$ が必要十分条件となる。

(答) $a>2$

IV

(1)

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1-t^2}{1+t^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-t)(1+t) &= 0 \\ \therefore t &= \pm 1 \\ y &= 0 \\ \Leftrightarrow t \frac{1-t^2}{1+t^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow t(1-t)(1+t) &= 0 \\ \therefore t &= 0, \pm 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $x=0$ となる t の値: ± 1 , $y=0$ となる t の値: $0, \pm 1$

(2)

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1 + \frac{2}{1+t^2}$$

である。 $1+t^2$ は 1 以上の全ての実数値をとるため、

$$0 < \frac{2}{1+t^2} \leq 2$$

であり、

$$-1 < \frac{1-t^2}{1+t^2} \leq 1$$

である。

(答) $-1 < x \leq 1$

(3)

$y = t \frac{1-t^2}{1+t^2}$ を t について微分すると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{t-t^3}{1+t^2} \right)' &= \frac{(1-3t^2)(1+t^2) - 2t(t-t^3)}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{-t^4 - 4t^2 + 1}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{-\{t^2 - (-2 - \sqrt{5})\} \{t^2 - (-2 + \sqrt{5})\}}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{-\{t^2 + 2 + \sqrt{5}\} \{t - \sqrt{\sqrt{5}-2}\} \{t + \sqrt{\sqrt{5}-2}\}}{(1+t^2)^2} \end{aligned}$$

となる。したがって、 y の増減は下表のようになる。

t	$-\infty$	$\cdots$	$-\sqrt{\sqrt{5}-2}$	$\cdots$	$\sqrt{\sqrt{5}-2}$	$\cdots$	∞
$y'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$y(t)$	∞	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$-\infty$

したがって $t = \pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$ で y は極値をとる。よって、 $t^2 = \sqrt{5}-2$ を $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ に代入して、

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ を得る。}$$

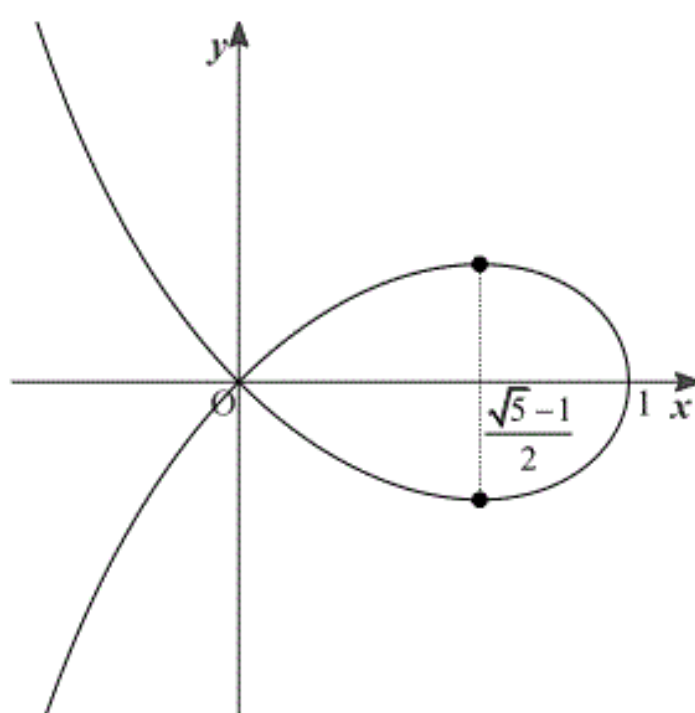
(答) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(4)

(2)の過程から、 x の t に関する増減は、下表のようになる。

t	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
x	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

また、(3)の過程から得た y の t に関する増減も考慮すると、曲線 C の概形は下図のようになる。



x は t についての偶関数であり、 y は t についての奇関数であるから軌跡は x 軸対称である。よって、 $y \geq 0$ の部分と x 軸で囲まれた部分の面積を求めて、それを 2 倍すればよい。曲線 C の点 $(1, 0)$ から原点までの部分が、媒介変数 t の $0 \leq t \leq 1$ の部分に相当することに注意すると、 $y \geq 0$ の部分の面積は

$$\begin{aligned} -\int_0^1 y(t)x'(t)dt &= -\int_0^1 t \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{4t^2(1-t^2)}{(1+t^2)^3} dt \end{aligned}$$

となる。 $t = \tan \theta$ と置換すると、積分区間の対応は下表のようになる。

t	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

求める定積分は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{4t^2(1-t^2)}{(1+t^2)^3} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4 \tan^2 \theta (1 - \tan^2 \theta)}{(1 + \tan^2 \theta)^3} (\tan \theta)' d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) \cdot \cos^6 \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 4 \sin^4 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ 4 \left(\frac{\sin 2\theta}{2} \right)^2 - 4 \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 \right\} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 2\theta - \cos^2 2\theta + 2 \cos 2\theta - 1) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 - \cos 4\theta}{2} - \frac{1 + \cos 4\theta}{2} + 2 \cos 2\theta - 1 \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\cos 4\theta + 2 \cos 2\theta - 1) d\theta \\ &= \left[-\frac{\sin 4\theta}{4} + \sin 2\theta - \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

となる。求める面積は、これを 2 倍して、 $2 - \frac{\pi}{2}$ である。

(答) 上図、 $2 - \frac{\pi}{2}$