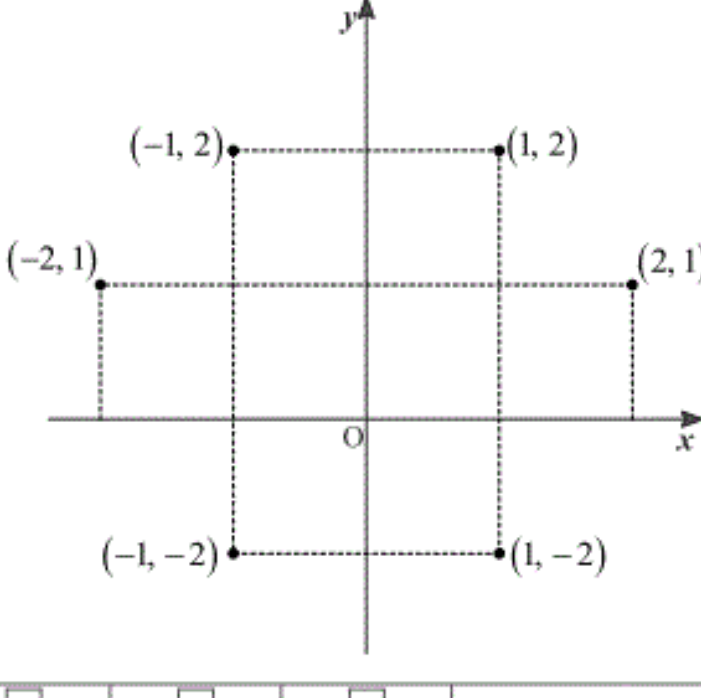


1

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	重心
(2)	ク						
	$(-2, 1), (-1, -1), (-1, 2), (1, -1), (1, 2), (2, 1)$						
	ケ						
							
(3)	コ	サ	シ	ス			
	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$			

【解説】

(1)

点 P の位置ベクトルを、実数 s, t を用いて $\overrightarrow{OP} = s\vec{a} + t\vec{b}$ と表す。ここで、問題文より

$|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 4, |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{21}$ であるから、これらより

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{21})^2 &= 5^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4^2 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= 10 \end{aligned}$$

がわかる。さらに、線分 OA, OB の中点をそれぞれ M, N とおく。ここで、点 P は $\triangle OAB$ の外心であるから、外心の性質より $\overline{MP} \perp \overline{OA}, \overline{NP} \perp \overline{OB}$ が成り立つ。従って、それぞれ

$$\begin{aligned} \overline{MP} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \left(s - \frac{1}{2} \right) \vec{a} + t\vec{b} \right\} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(s - \frac{1}{2} \right) |\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \therefore 10s + 4t &= 5 \left(\because |\vec{a}|^2 = 25, \vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \right) \\ \overline{NP} \cdot \overline{OB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ s\vec{a} + \left(t - \frac{1}{2} \right) \vec{b} \right\} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow s\vec{a} \cdot \vec{b} + \left(t - \frac{1}{2} \right) |\vec{b}|^2 &= 0 \\ \therefore 5s + 8t &= 4 \left(\because |\vec{b}|^2 = 16, \vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \right) \end{aligned}$$

が成り立つ。従って、 s, t について解くと $(s, t) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{4} \right)$ を得るため、点 P の位置ベクトルは

$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ である。また、垂心 H の位置ベクトルも実数 x, y を用いて $\overrightarrow{OH} = x\vec{a} + y\vec{b}$ と表

す。垂心の性質より $\overline{AH} \perp \overline{OB}, \overline{BH} \perp \overline{OA}$ が成り立つため、それぞれ

$$\begin{aligned} \overline{AH} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ (x-1)\vec{a} + y\vec{b} \right\} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + y|\vec{b}|^2 &= 0 \\ \therefore 5x + 8y &= 5 \left(\because |\vec{b}|^2 = 16, \vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \right) \\ \overline{BH} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ x\vec{a} + (y-1)\vec{b} \right\} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow x|\vec{a}|^2 + (y-1)\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \therefore 5x + 2y &= 2 \left(\because |\vec{a}|^2 = 25, \vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \right) \end{aligned}$$

が成り立つ。従って、 x, y について解くと $(x, y) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2} \right)$ を得るため、点 H の位置ベクトル

は $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ である。さらに、内分の公式より、線分 PH を 1:2 に内分する点 D は

$$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

と計算できるため、点 D は $\triangle OAB$ の重心である。

(2)

$|x| = t$ とおくと、 $t \geq 0$ である。このとき、与式は

$$\begin{aligned} t^2 - ty + y^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow 4t^2 - 4ty + 4y^2 &= 12 \\ \Leftrightarrow (2t - y)^2 + 3y^2 &= 12 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $(2t - y)^2 \geq 0$ より、 $3y^2 \leq 12$ つまり $-2 \leq y \leq 2$ であるが、 y は整数よ

り候補は $y = -2, -1, 0, 1, 2$ である。これらについて場合分けして考える。

[1] $y = -2$ のとき

代入すると

$$\begin{aligned} t^2 + 2t + 1 &= 0 \\ \therefore t &= -1 \end{aligned}$$

が得られるが、 $t \geq 0$ より不適当である。

[2] $y = -1$ のとき

代入すると

$$\begin{aligned} t^2 + t - 2 &= 0 \\ \therefore t &= 1 \left(\because t \geq 0 \right) \end{aligned}$$

が得られる。ここで $t = |x|$ より、 $x = \pm 1$ が解である。

[3] $y = 0$ のとき

代入すると

$$\begin{aligned} t^2 &= 3 \\ \therefore t &= \sqrt{3} \left(\because t \geq 0 \right) \end{aligned}$$

が得られるが、 t は整数より不適当である。

[4] $y = 1$ のとき

代入すると

$$\begin{aligned} t^2 - t - 2 &= 0 \\ \therefore t &= 2 \left(\because t \geq 0 \right) \end{aligned}$$

が得られる。ここで $t = |x|$ より、 $x = \pm 2$ が解である。

[5] $y = 2$ のとき

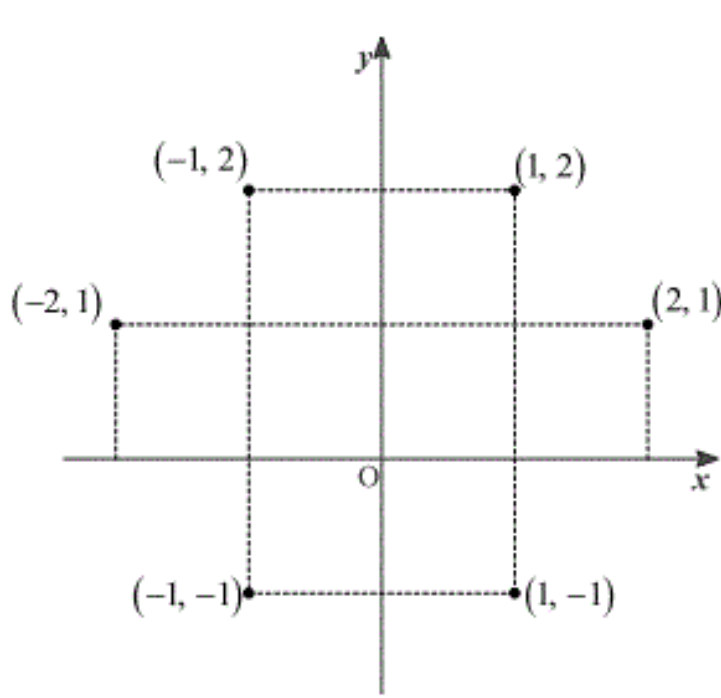
代入すると

$$\begin{aligned} t^2 - 2t + 1 &= 0 \\ \therefore t &= 1 \end{aligned}$$

が得られる。ここで $t = |x|$ より、 $x = \pm 1$ が解である。

以上 [1], [2], [3], [4], [5] より、求める (x, y) の解は $(-2, 1), (-1, -1), (-1, 2), (1, -1), (1, 2), (2, 1)$

である。さらに、これを xy 平面上に図示すると、以下のようになる。



(3)

A 地区の住民を検査した結果が陽性になる確率は、「A 地区でこの病気にかかっている人が検査して陽性になる場合」と「A 地区でこの病気にかかっていない人が検査して陽性になる場合」が考えられる。前者は (A 地区でこの病気にかかっている確率) $\cdot$ (病気にかかっている人が陽性と判断される確率)、後者は (A 地区でこの病気にかかっていない確率) $\cdot$ (病気にかかっていない人が陽性と判断される確率) で計算できるため、この確率は

$$\frac{1}{56} \cdot \frac{3}{4} + \left(1 - \frac{1}{56} \right) \left(1 - \frac{19}{20} \right) = \frac{1}{16}$$

である。さらに、A 地区で検査して陽性と判断された人のうち実際に病気にかかっている確率は、分子を「A 地区で検査し陽性と判断され、かつ実際に病気にかかっている確率」、分母を「A 地区の住民を検査した結果が陽性になる確率」とした条件付き確率であると考えられるため、これを計算すると

$$\frac{\frac{1}{56} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{16}} = \frac{3}{14}$$

である。一方、B 地区でこの病気にかかっている人の確率を p とおくと、上記 A 地区と同様に B 地区の住民を検査した結果が陽性になる確率は

$$p \cdot \frac{3}{4} + (1 - p) \left(1 - \frac{19}{20} \right)$$

と表せる。問題文よりこれは $\frac{3}{20}$ であるので、この方程式を解くと $p = \frac{1}{7}$ を得る。さらに、B

地区で検査して陽性と判断された人のうち実際に病気にかかっている確率は、同様に

$$\frac{p \cdot \frac{3}{4}}{\frac{3}{20}} = \frac{5}{7}$$

と求められる。

II

(1)

$\alpha = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ であるから、ド・モアブルの定理より

$$\alpha^7 = \left(\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} \right)^7 = \cos 7 \cdot \frac{2\pi}{7} + i \sin 7 \cdot \frac{2\pi}{7} = 1$$

が成り立つ。よって、 $\alpha^7 - 1 = 0$ であり、明らかに $\alpha \neq 1$ であるから、変形して

$$\begin{aligned} \alpha^7 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 &= 0 \quad (\because \alpha \neq 1) \\ \Leftrightarrow (\alpha + \alpha^2 + \alpha^4) + (\alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6) &= -1 \\ \therefore \beta + \gamma &= -1 \end{aligned}$$

がわかる。また、 $\beta\gamma$ も計算すると

$$\begin{aligned} \beta\gamma &= (\alpha + \alpha^2 + \alpha^4)(\alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6) \\ &= \alpha^4(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + 3\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) \\ &= 2\alpha^7 \quad (\because \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0) \\ &= 2 \end{aligned}$$

がわかる。

(答) $\beta + \gamma = -1, \beta\gamma = 2$

(2)

(1)より、解と係数の関係から、 β, γ は 2 次方程式 $t^2 + t + 2 = 0$ の解である。よってこれを解

くと、 $t = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ である。一方、 β は

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 \\ &= \left(\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} \right) + \left(\cos 2 \cdot \frac{2\pi}{7} + i \sin 2 \cdot \frac{2\pi}{7} \right) + \left(\cos 4 \cdot \frac{2\pi}{7} + i \sin 4 \cdot \frac{2\pi}{7} \right) \\ &= \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} \right) + i \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} \right) \end{aligned}$$

より虚部は $\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7}$ であるので、これを变形すると

$$\begin{aligned} \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} &= \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \left(\because \sin \left(\pi + \frac{\pi}{7} \right) = -\sin \frac{\pi}{7} \right) \\ &> \sin \frac{4\pi}{7} \left(\because \sin \frac{2\pi}{7} > \sin \frac{\pi}{7} \right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

となり、 β の虚部は正であるといえる。従って、2 つの複素数解のうち β, γ はそれぞれ

$$\beta = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}, \gamma = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2} \text{ とわかる。}$$

(答) $\beta = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}, \gamma = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}$

(3)

(2)より、 β は $\beta = \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} \right) + i \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$ と表せ

る。さらに $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7}$, $\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7}$ はともに実数であるため、係数を比較すると

$$\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

とわかる。また、 $\sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7}$ については

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} \right) \sin \frac{3\pi}{7} \left(\because \sin A \sin B = \frac{1}{2} \{ \cos(A-B) - \cos(A+B) \} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} - \sin \frac{6\pi}{7} \right) \left(\because \cos A \sin B = \frac{1}{2} \{ \sin(A+B) - \sin(A-B) \} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} \right) \left(\because \sin(2\pi - A) = -\sin A \right) \end{aligned}$$

と変形でき、さらに β の虚部は $\frac{\sqrt{7}}{2}$ であるから、

$$\sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{4} \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} \right) = \frac{\sqrt{7}}{8}$$

である。

(答) $\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}$

Ⅲ

(1)

$n=1$ を代入すると, $5a_2=10\cdot\frac{1}{13}-a_2\cdot\frac{1}{13}$ であり, $a_2=\frac{5}{33}$ を得る。同様に, $n=2$ を代入すると,

$$\begin{aligned} 5a_3 &= 10\cdot\frac{5}{33}-a_3\cdot\frac{5}{33} \\ \therefore a_3 &= \frac{5}{17} \end{aligned}$$

を得る。同様に, $n=3$ を代入すると,

$$\begin{aligned} 5a_4 &= 10\cdot\frac{5}{17}-a_4\cdot\frac{5}{17} \\ \therefore a_4 &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad a_2 = \frac{5}{33}, a_3 = \frac{5}{17}, a_4 = \frac{5}{9}$$

(2)

まず, すべての自然数 n で $a_n \neq 0$ であることを背理法で示す。 $a_1 \neq 0$ であるため, ある 2 以上の整数 n に対し $a_n = 0$ と仮定すると, 漸化式より

$$\begin{aligned} 5\cdot 0 &= 10a_{n-1} - 0\cdot a_{n-1} \\ \therefore a_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

となる。これを繰り返し行くと, $n \geq k$ を満たす任意の自然数 k に対し $a_k = 0$ が成り立つが, これは $a_1 \neq 0$ に矛盾する。従って, すべての自然数 n に対し $a_n \neq 0$ である。ここで, 漸化式

$$\text{を両辺 } \frac{1}{a_n a_{n+1}} \text{ で割ると, } \frac{5}{a_n} = \frac{10}{a_{n+1}} - 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \text{ が成り立つ。ここで } b_n = \frac{1}{a_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

とおいて変形すると, $10b_{n+1} = 5b_n + 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ を得る。ここで, この式を変形して

$$\begin{aligned} 10b_{n+1} &= 5b_n + 1 \\ \Leftrightarrow \left(b_{n+1} - \frac{1}{5}\right) &= \frac{1}{2} \left(b_n - \frac{1}{5}\right) \end{aligned}$$

よって,

$$b_n - \frac{1}{5} = \left(b_1 - \frac{1}{5}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となり, $b_1 = \frac{1}{a_1} = 13$ であるから,

$$\therefore b_n = \frac{1}{5} \left\{ 1 + 64 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} = \frac{1 + 2^{7-n}}{5} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

とできるため, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \frac{5}{1 + 2^{7-n}} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ とわかる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{5}{1 + 2^{7-n}} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(3)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ であるから, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{1 + 2^{7-n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{1 + 2^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n} \\ &= 5 \end{aligned}$$

と計算できる。また, $a_m = \frac{5}{2}$ をみたす整数 m は,

$$\begin{aligned} \frac{5}{1 + 2^{7-m}} &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow 2^{7-m} &= 1 \\ \Leftrightarrow 7 - m &= 0 \\ \therefore m &= 7 \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad \alpha = 5, m = 7$$

(4)

$1 \leq k < m$ を満たす整数 k について,

$$\begin{aligned} a_{m-k} + a_{m+k} &= \frac{5}{1 + 2^{7-(7-k)}} + \frac{5}{1 + 2^{7-(7+k)}} \\ &= \frac{5}{1 + 2^k} + \frac{5 \cdot 2^k}{1 + 2^k} \\ &= 5 \left(\frac{1}{1 + 2^k} + \frac{2^k}{1 + 2^k} \right) \\ &= 5 \end{aligned}$$

より, $a_{m-k} + a_{m+k} = \alpha \quad (1 \leq k < m)$ が成り立つ。

(証明終)

従って, 与式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m-1} \sum_{k=1}^{2m-1} a_k &= \frac{1}{13} (a_1 + a_2 + \dots + a_{13}) \\ &= \frac{1}{13} a_7 + \frac{1}{13} \sum_{k=1}^6 (a_{7-k} + a_{7+k}) \\ &= \frac{1}{13} \left(\frac{5}{2} + 5 \cdot 6 \right) \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{2}$$

Ⅳ

(1)

媒介変数表示された曲線

$$x=2\cos\theta, y=\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}|\cos\theta| \quad (0\leq\theta<2\pi)$$

を変形すると,

$$\cos\theta=\frac{x}{2}, \sin\theta=\frac{2}{3}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{4}|x|\right)$$

$$\therefore\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{4}{9}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{4}|x|\right)^2=1$$

とできる。ここで x に $-x$ を代入しても式は変わらないため、このグラフは y 軸に対称なグ

ラフである。ここで $x\leq 0$ のみに焦点を当てて考えると、 $\cos\theta\leq 0$ つまり $\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{2}$ につい

てのみ考えればよいため、 $y=\frac{3}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$ であり、 x, y を θ で微分すると、

$$\frac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{3}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$

を得る。ここで

$$\frac{dx}{d\theta}=0\Leftrightarrow\theta=\pi$$

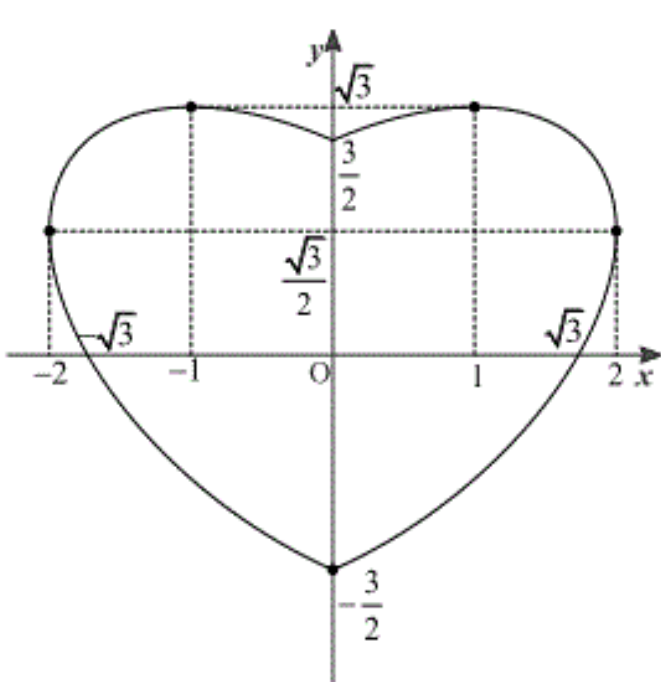
$$\frac{dy}{d\theta}=0\Leftrightarrow\theta=\frac{2}{3}\pi$$

$$\left(\because\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{3}{2}\pi\right)$$

であるため、 x および y の $\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{3}{2}\pi$ における増減表は以下である。

θ	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$		$-$	0	$+$	
x	0		-1		-2		0
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$		$-$	
y	$\frac{3}{2}$		$\sqrt{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$-\frac{3}{2}$

従って、このグラフの概形は下図のようになる。



(答) 上図

(2)

(1)と同様に $\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{3}{2}\pi$ について考える。図より、求める面積を S とし、 y_1 を $\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi$ にお

ける y, y_2 を $\pi\leq\theta\leq\frac{3}{2}\pi$ における y として考えると、

$$S=2\int_{-2}^0(y_1-y_2)dx$$

と書ける。ここで、 $\int_{-2}^0y_1dx, \int_{-2}^0y_2dx$ についてそれぞれ計算すると

$$\begin{aligned}\int_{-2}^0y_1dx &= \int_{-2}^0y_1\frac{dx}{d\theta}\cdot d\theta \\ &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)(-2\sin\theta)d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(3\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta)d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left\{\frac{3}{2}(1-\cos2\theta)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\theta\right\}d\theta \\ &= \left[\frac{3}{2}\theta-\frac{3}{4}\sin2\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}\cos2\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \frac{3}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{3}{4}(\sin2\pi-\sin\pi)+\frac{\sqrt{3}}{4}(\cos2\pi-\cos\pi) \\ &= \frac{3}{4}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^0y_2dx &= \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left(\frac{3}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)(-2\sin\theta)d\theta \\ &= -\left[\frac{3}{2}\theta-\frac{3}{4}\sin2\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}\cos2\theta\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \\ &= -\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\pi-\pi\right)+\frac{3}{4}(\sin3\pi-\sin2\pi)-\frac{\sqrt{3}}{4}(\cos3\pi-\cos2\pi) \\ &= -\frac{3}{4}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

を得る。以上より、求める答は

$$2\int_{-2}^0(y_1-y_2)dx=2\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\left(-\frac{3}{4}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\pi$$

である。

(答) 3π

(3)

x_1 を $\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{2\pi}{3}$ における x, x_2 を $\frac{2\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{2}$ における x とすると、曲線 D を y 軸のまわり

に1回転してできる立体の体積 V は

$$V=\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}}\pi(x_2)^2dy-\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}}\pi(x_1)^2dy$$

と立式できる。ここで $\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}}\pi(x_2)^2dy, \int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}}\pi(x_1)^2dy$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}}\pi(x_2)^2dy &= \int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}}\pi(x_2)^2\frac{dy}{d\theta}\cdot d\theta \\ &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi}\pi(2\cos\theta)^2\left(\frac{3}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)d\theta \\ &= \pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi}\left\{6(1-\sin^2\theta)\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos^2\theta\right\}d\theta \\ &= \pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi}\left(6\cos\theta-6\cos\theta\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos^2\theta\right)d\theta \\ &= \pi\left[6\sin\theta-2\sin^3\theta-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos^3\theta\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \\ &= \pi\left(6\sin\frac{2}{3}\pi-6\sin\frac{3}{2}\pi\right)-2\pi\left(\sin^3\frac{2}{3}\pi-\sin^3\frac{3}{2}\pi\right)-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\left(\cos^3\frac{2}{3}\pi-\cos^3\frac{3}{2}\pi\right) \\ &= \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}+4\right)\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}}\pi(x_1)^2dy &= \int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}}\pi(x_1)^2\frac{dy}{d\theta}\cdot d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}\pi(2\cos\theta)^2\left(\frac{3}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)d\theta \\ &= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}\left\{6(1-\sin^2\theta)\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos^2\theta\right\}d\theta \\ &= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}\left(6\cos\theta-6\cos\theta\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos^2\theta\right)d\theta \\ &= \pi\left[6\sin\theta-2\sin^3\theta-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos^3\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \\ &= \pi\left(6\sin\frac{2}{3}\pi-6\sin\frac{\pi}{2}\right)-2\pi\left(\sin^3\frac{2}{3}\pi-\sin^3\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\left(\cos^3\frac{2}{3}\pi-\cos^3\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}-4\right)\pi\end{aligned}$$

と計算できる。従って、求める体積は

$$\begin{aligned}V &= \int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}}\pi(x_2)^2dy-\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}}\pi(x_1)^2dy \\ &= \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}+4\right)\pi-\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}-4\right)\pi \\ &= 8\pi\end{aligned}$$

と求められる。

(答) 8π