

# I

【解答】

|     |                 |     |                  |     |                    |     |                |
|-----|-----------------|-----|------------------|-----|--------------------|-----|----------------|
| (1) | $\frac{11}{50}$ | (2) | $\frac{11}{125}$ | (3) | $\frac{121}{1000}$ | (4) | $\frac{5}{11}$ |
|-----|-----------------|-----|------------------|-----|--------------------|-----|----------------|

【解説】

装置に表示される各桁の数字の確率分布表は次のようになる。

| 数字   | 1             | 2              | 3              | 4              | 5              |
|------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 状態 A | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |
| 状態 B | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$  | $\frac{1}{5}$  | 0              | $\frac{2}{5}$  |

(1)

状態 A のとき、3 桁の数字が 111 となる確率は  $\left(\frac{3}{5}\right)^3$  であり、222, 333, 444, 555 となる確率は

いずれも  $\left(\frac{1}{10}\right)^3$  であるから、状態 A のときにボタンを押して「あたり」が出る確率は

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{11}{50}$$

となる。

(2)

状態 B のとき、3 桁の数字が 111, 222, 333 となる確率はいずれも  $\left(\frac{1}{5}\right)^3$  であり、444 となる確

率は 0、555 となる確率は  $\left(\frac{2}{5}\right)^3$  であるから、状態 B のときにボタンを押して「あたり」が出る確率は

$$3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 + 0 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{11}{125}$$

となる。

(3)

状態 A が選ばれる確率は  $\frac{1}{4}$ 、状態 B が選ばれる確率は  $\frac{3}{4}$  であるから、(1), (2) の結果と合わせ

ると、ボタンを押して「あたり」が出る確率は

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{11}{50} + \frac{3}{4} \cdot \frac{11}{125} = \frac{121}{1000}$$

となる。

(4)

次のように事象  $X, Y$  を定める。

$X$  : 装置の状態が状態 A である

$Y$  : ボタンを押して「あたり」が出る

一般に、事象  $E$  の起こる確率を  $P(E)$  と書くことにすると、(3) の結果より

$$P(X \cap Y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{50} = \frac{11}{200}$$

$$P(Y) = \frac{121}{1000}$$

であるから、ボタンを押して「あたり」が出たという条件の下で、装置の状態が状態 A であるという条件付き確率  $P_Y(X)$  は

$$\begin{aligned} P_Y(X) &= \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \\ &= \frac{11}{200} \cdot \frac{1000}{121} \\ &= \frac{5}{11} \end{aligned}$$

となる。

## II

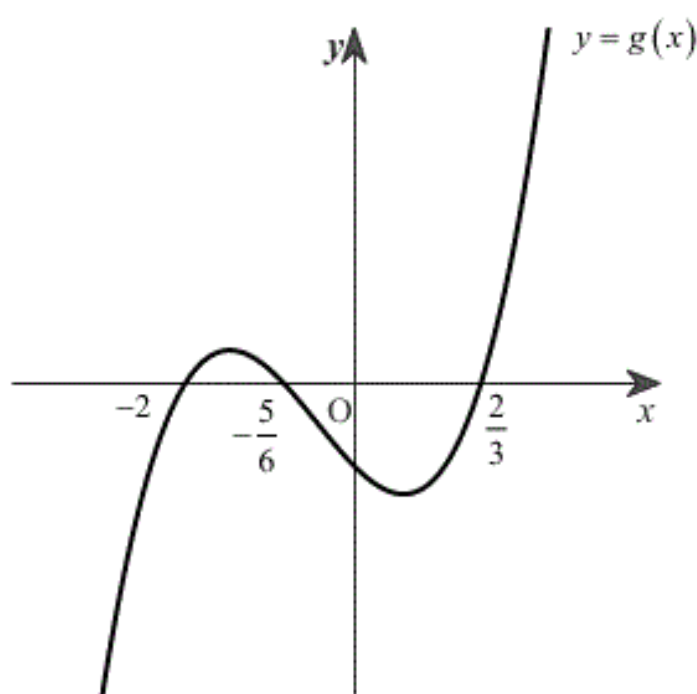
(1)

$f(x) > 0$  の両辺に  $(3x-2)^2$  をかけると、

$$(6x+5)(x+2)(3x-2) > 0$$

となる。ここで、 $g(x) = (6x+5)(x+2)(3x-2)$  とおくと、 $g(x)$  は3次の係数が正で

$x = -2, -\frac{5}{6}, \frac{2}{3}$  を  $g(x) = 0$  の解にもつ3次関数であるから、 $y = g(x)$  のグラフの概形は次の通りである。



よって、 $f(x) > 0$  を満たす  $x$  の範囲は  $-2 < x < -\frac{5}{6}$  または  $\frac{2}{3} < x$  である。

(答)  $-2 < x < -\frac{5}{6}, \frac{2}{3} < x$

(2)

$6x^2 + 17x + 10$  を  $3x-2$  で割ると

$$6x^2 + 17x + 10 = (3x-2)(2x+7) + 24$$

であることから

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(3x-2)(2x+7) + 24}{3x-2} \\ &= 2x+7 + \frac{24}{3x-2} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $f(x) = Ax + B + \frac{C}{3x-2}$  が  $x$  についての恒等式となる定数  $A, B, C$  は

$A=2, B=7, C=24$  である。

(答)  $A=2, B=7, C=24$

(3)

(1)の結果より、 $f(n) > 0$  となるのは  $n$  が  $-2 < n < -\frac{5}{6}$  または  $\frac{2}{3} < n$  を満たす整数であるとき、

すなわち  $n = -1$  または  $n$  が正の整数となるときである。ここで

$$f(-1) = \frac{1}{5}$$

より、 $f(-1)$  は正の整数とはならず  $n = -1$  は不適である。したがって、 $n$  は正の整数となることが必要である。さらに、(2)の結果より

$$f(n) = 2n+7 + \frac{24}{3n-2}$$

と表せる。整数  $n$  について  $n > 0$  と  $3n-2 > 0$  が同値であることをふまえると、以上のことから  $f(n)$  が正の整数となるのは、 $3n-2$  が24の正の約数となるときである。 $3n-2$  は3で割った余りが1であることに注意すると、条件を満たす  $n$  は

$$3n-2 = 1, 4 \Leftrightarrow n = 1, 2$$

のみである。

(答)  $n = 1, 2$

Ⅲ

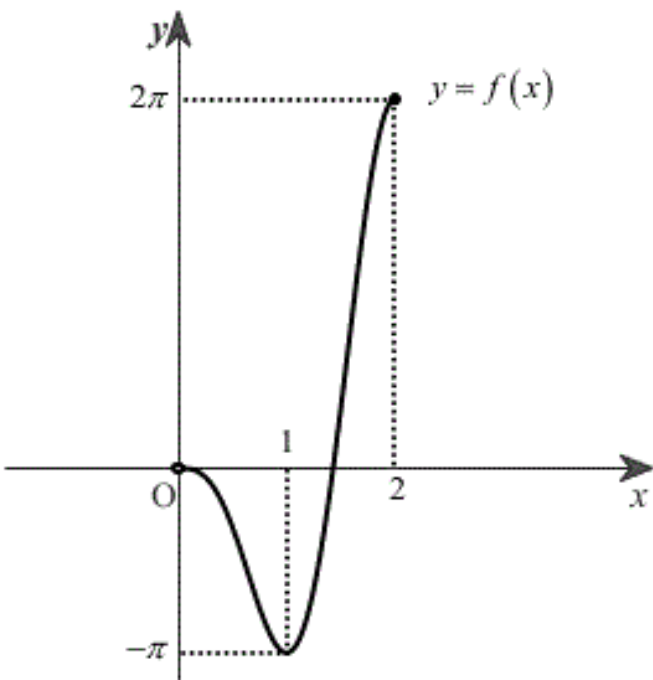
(1)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \pi \cos(\pi x) - \pi^2 x \sin(\pi x) - \pi \cos(\pi x) \\ &= -\pi^2 x \sin(\pi x)\end{aligned}$$

であり、 $x > 0$  に注意すると  $f'(x)$  の符号は  $-\sin(\pi x)$  の符号に一致する。したがって、 $f(x)$  の増減表は次のようになる。

|         |       |            |        |            |        |
|---------|-------|------------|--------|------------|--------|
| $x$     | $(0)$ | $\cdots$   | $1$    | $\cdots$   | $2$    |
| $f'(x)$ |       | $-$        | $0$    | $+$        |        |
| $f(x)$  |       | $\searrow$ | $-\pi$ | $\nearrow$ | $2\pi$ |

また、 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$  であるから、 $0 < x \leq 2$  における曲線  $y = f(x)$  の概形は次の通りである。



(答) 前表および前図

(2)

$f(x)$  は連続関数であるから(1)で求めた増減と合わせると、中間値の定理より  $f(x) = 0$  の解はただ1つ存在することがわかる。さらに、ここから  $f\left(\frac{4}{3}\right) < 0$  および  $f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$  を示して、

$f(x) = 0$  のただ1つの解が  $\frac{4}{3} < x < \frac{3}{2}$  の範囲にあることを確認する。

$3 < \pi < 2\sqrt{3}$  と  $\sqrt{3} < 2$  より、

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} < -\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{2}{2} = -1 < 0$$

であり、また

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 > 0$$

であるから、題意は示された。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{\pi x \cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x^2} \\ &= \frac{f(x)}{x^2}\end{aligned}$$

となるため、 $x > 0$  に注意すると  $g'(x)$  の符号は  $f(x)$  の符号に一致する。そこで、 $f(x) = 0$

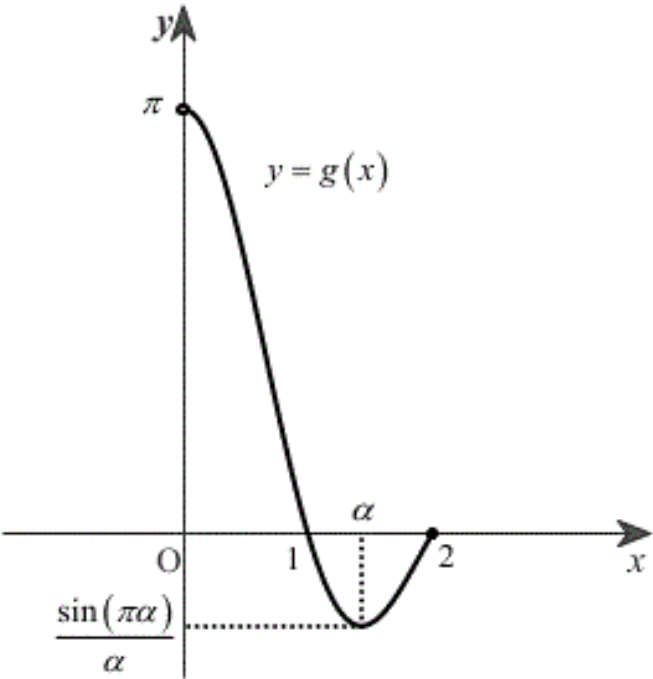
のただ1つの解を  $\alpha \left( \frac{4}{3} < \alpha < \frac{3}{2} \right)$  とおく。さらに

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \pi \\ &= \pi\end{aligned}$$

であることに注意すると、 $g(x)$  の増減表は次のようになる。

|         |         |            |                                  |            |     |
|---------|---------|------------|----------------------------------|------------|-----|
| $x$     | $(0)$   | $\cdots$   | $\alpha$                         | $\cdots$   | $2$ |
| $g'(x)$ |         | $-$        | $0$                              | $+$        |     |
| $g(x)$  | $(\pi)$ | $\searrow$ | $\frac{\sin(\pi\alpha)}{\alpha}$ | $\nearrow$ | $0$ |

したがって、曲線  $y = g(x)$  の概形は次の通りである。



ここで、 $1 < \alpha < 2$  より  $-1 \leq \sin(\pi\alpha) < 0$  となり、 $-1 < \frac{\sin(\pi\alpha)}{\alpha} < 0$  であるため、 $n$  を整数として

直線  $y = n$  と曲線  $y = g(x)$  の共有点の個数は

$$\begin{cases} n = 0 \text{ のとき } 2 \text{ 個} \\ n = 1, 2, 3 \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\ n \geq 4, n \leq -1 \text{ のとき } 0 \text{ 個} \end{cases}$$

となる。

(答) 前述



# IV

(1)

直線 PQ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} (x - \cos \theta) + \cos^2 \theta \\ &= (\cos \theta + \sin \theta) (x - \cos \theta) + \cos^2 \theta \\ &= (\cos \theta + \sin \theta) x - \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

である。ここで、線分 PQ の中点の  $x$  座標である  $t$  を用いると

$$\begin{aligned} t &= \frac{\cos \theta + \sin \theta}{2} \\ \Leftrightarrow \cos \theta + \sin \theta &= 2t \end{aligned}$$

となり、さらにこの式の両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sin \theta \cos \theta &= 4t^2 \\ \Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta &= 2t^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が得られるため、直線 PQ の方程式を  $t$  を用いて表すと

$$y = 2tx - 2t^2 + \frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = 2tx - 2t^2 + \frac{1}{2}$$

(2)

$L^2$  のとりうる値の範囲を考える。

$$\begin{aligned} L^2 &= (\cos \theta - \sin \theta)^2 + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \\ &= (\cos \theta - \sin \theta)^2 \{1 + (\cos \theta + \sin \theta)^2\} \\ &= (1 - \sin 2\theta)(2 + \sin 2\theta) \end{aligned}$$

より、 $u = \sin 2\theta$  とおくと、 $L^2$  は  $u$  の 2 次関数であり

$$\begin{aligned} L^2 &= (1 - u)(2 + u) \\ &= -u^2 - u + 2 \\ &= -\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\theta = \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$  の範囲を動くことから、 $u$  の動く範囲は  $-1 \leq u \leq 0$  とな

り、 $L^2$  は  $u = -\frac{1}{2}$  を軸にもつ上に凸な放物線であることから、 $L^2$  は  $u = -1, 0$  において最小、

$u = -\frac{1}{2}$  において最大となって、その間の値を連続的にとりうることがわかる。したがって、

$$2 \leq L^2 \leq \frac{9}{4} \text{ であり、} L > 0 \text{ より、} L \text{ のとりうる値の範囲は } \sqrt{2} \leq L \leq \frac{3}{2} \text{ となる。}$$

$$(\text{答}) \quad \sqrt{2} \leq L \leq \frac{3}{2}$$

(3)

(2)の結果より、 $L$  が最大となるのは  $u = -\frac{1}{2}$  となるときであり、 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$  に注意すると、このとき

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2\theta &= \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi$$

(4)

点 P, Q は曲線  $y = x^2$  上の点であり、 $y = x^2$  は下に凸な曲線であることから、線分 PQ は常に曲線  $y = x^2$  より上側に存在する。つまり、線分 PQ は直線 PQ のうち  $y \geq x^2$  の領域にある部分と言い換えることができる。よって、直線 PQ の通過領域と領域  $y \geq x^2$  の共通部分は、線分 PQ の通過領域に一致する。ここで、PQ の方程式を  $t$  の関数と見て  $f(t)$  とおくと、(1)の結果より

$$\begin{aligned} f(t) &= -2t^2 + 2xt + \frac{1}{2} \\ &= -2\left(t - \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。また、三角関数の合成より

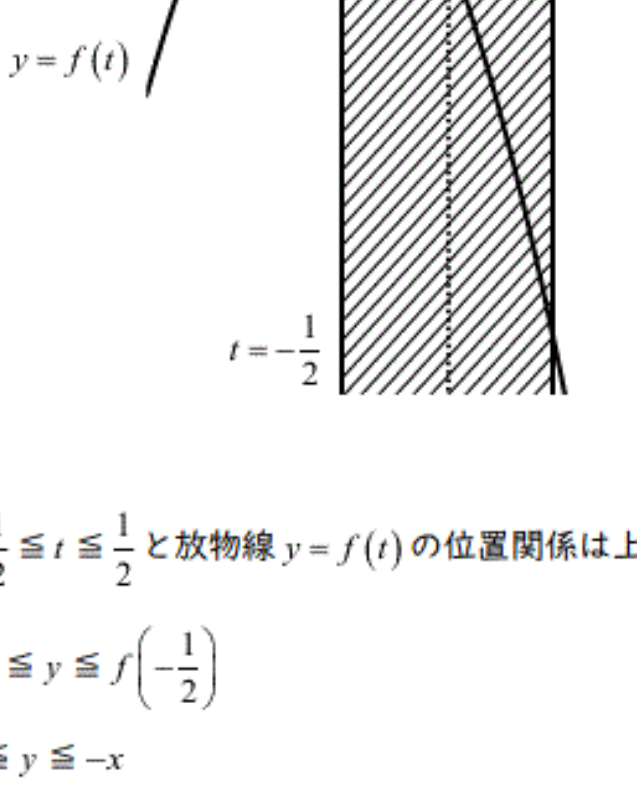
$$\begin{aligned} t &= \frac{\cos \theta + \sin \theta}{2} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

となるから、 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$  に注意すると、 $t$  は  $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$  の範囲を連続的に動くことがわか

る。以下、 $x$  を固定して  $t$  を  $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$  の範囲で動かしたときの  $y = f(t)$  の値域を考える。

いま、 $y = f(t)$  は  $t = \frac{x}{2}$  を軸にもつ上に凸な放物線であるから、軸の位置に応じて場合分けを行う。

[1]  $\frac{x}{2} < -\frac{1}{2}$ , すなわち  $x < -1$  のとき

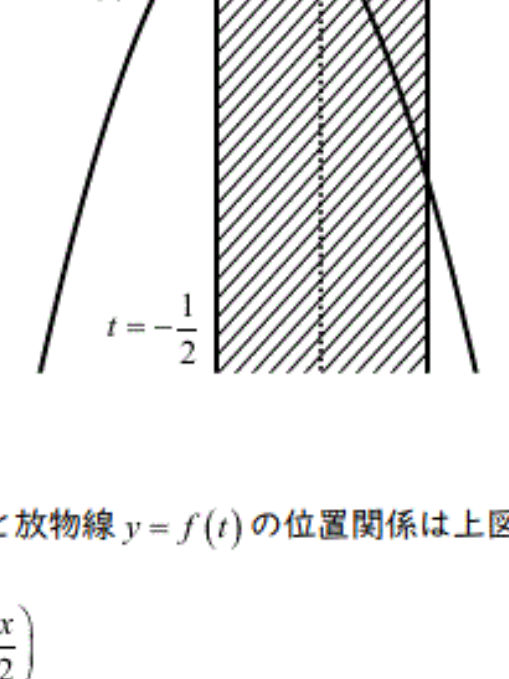


閉区間  $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$  と放物線  $y = f(t)$  の位置関係は上図のようになるため、値域は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &\leq y \leq f\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow x &\leq y \leq -x \end{aligned}$$

となる。

[2]  $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < 0$ , すなわち  $-1 \leq x < 0$  のとき

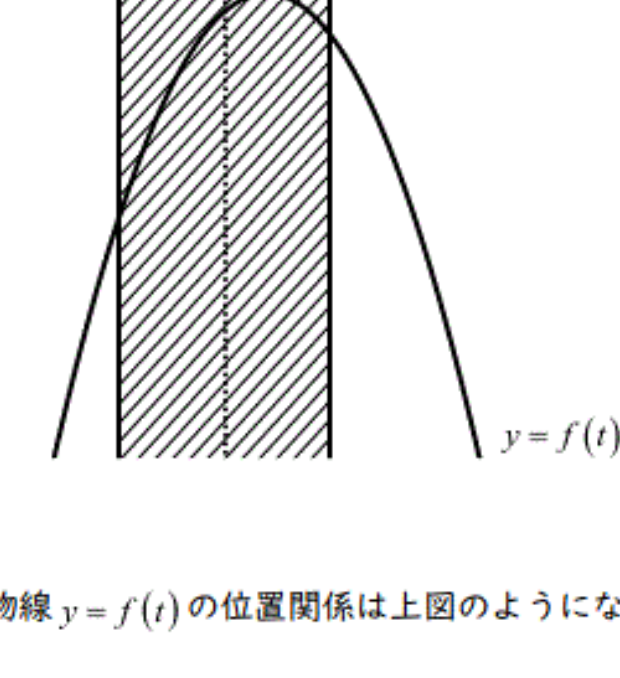


閉区間  $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$  と放物線  $y = f(t)$  の位置関係は上図のようになるため、値域は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &\leq y \leq f\left(\frac{x}{2}\right) \\ \Leftrightarrow x &\leq y \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

[3]  $0 \leq \frac{x}{2} < \frac{1}{2}$ , すなわち  $0 \leq x < 1$  のとき

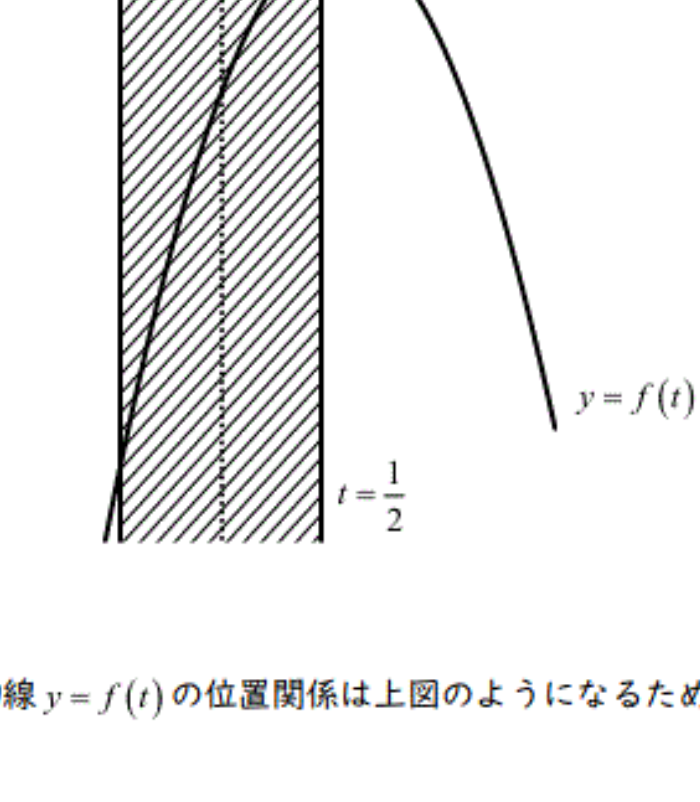


閉区間  $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$  と放物線  $y = f(t)$  の位置関係は上図のようになるため、値域は

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &\leq y \leq f\left(\frac{x}{2}\right) \\ \Leftrightarrow -x &\leq y \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

[4]  $\frac{x}{2} \geq \frac{1}{2}$ , すなわち  $x \geq 1$  のとき

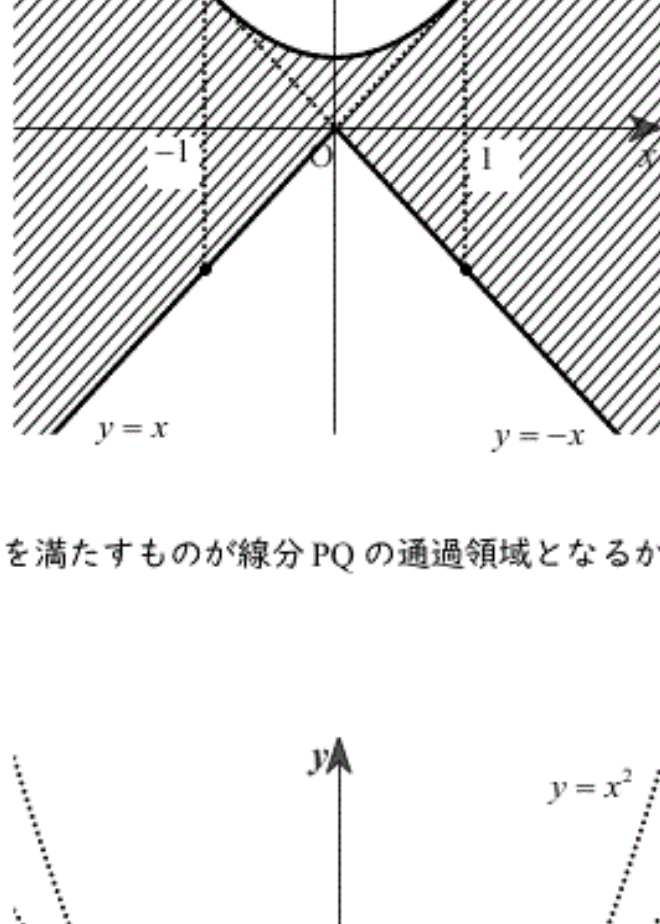


閉区間  $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$  と放物線  $y = f(t)$  の位置関係は上図のようになるため、値域は

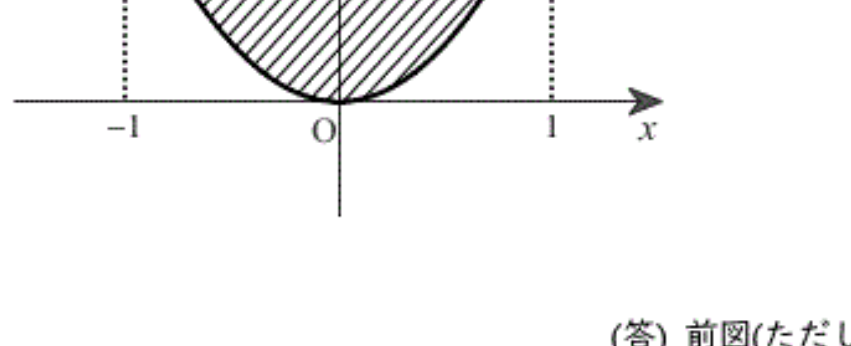
$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &\leq y \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow -x &\leq y \leq x \end{aligned}$$

となる。

以上、[1], [2], [3], [4]より、直線 PQ の通過領域は次図のようになる。



この領域のうち  $y \geq x^2$  を満たすものが線分 PQ の通過領域となるから、求める領域は次図の通りである。



$$(\text{答}) \quad \text{前図(ただし境界を含む)}$$



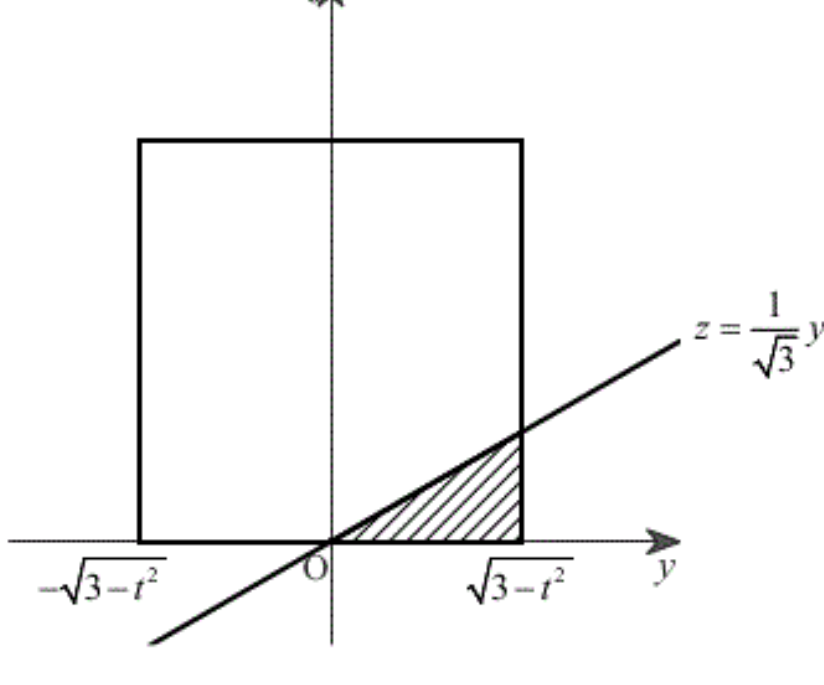
# V

(1)

$t$  は  $-\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$  を満たす実数とする。  $D_1$  の平面  $x=t$  における切り口は

$$y^2 \leq 3-t^2 \text{ かつ } 0 \leq z \leq 3 \text{ かつ } z \leq \frac{1}{\sqrt{3}}y$$

で表される領域であるから、  $O(t, 0, 0)$  として、断面を図示すると次のようになる。



なお、  $\frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{1-\frac{t^2}{3}} \leq 1$  より、平面  $z = \frac{1}{\sqrt{3}}y$  が円柱  $C$  の上面と交わらないことを用いている。したがって、平面  $x=t$  における  $D_1$  の断面積を  $S_1(t)$  とおくと、上図より

$$S_1(t) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3-t^2} \cdot \frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}(3-t^2)$$

であり、求める体積を  $V_1$  とすると

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} S_1(t) dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3-t^2) dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \left\{ -\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3}) dt \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{(2\sqrt{3})^3}{6} \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。

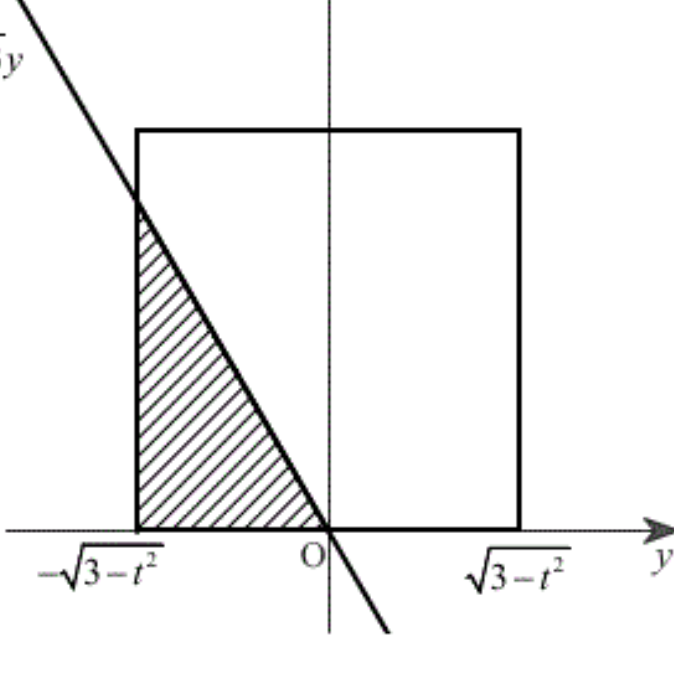
(答) 2

(2)

$t$  は  $-\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$  を満たす実数とする。  $D_2$  の平面  $x=t$  における切り口は

$$y^2 \leq 3-t^2 \text{ かつ } 0 \leq z \leq 3 \text{ かつ } z \leq -\sqrt{3}y$$

で表される領域であるから、  $O(t, 0, 0)$  として、断面を図示すると次のようになる。



なお、  $-\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3-t^2}) = \sqrt{3(3-t^2)} \leq 3$  より、平面  $z = -\sqrt{3}y$  が円柱  $C$  の上面と交わらないことを用いている。したがって、平面  $x=t$  における  $D_2$  の断面積を  $S_2(t)$  とおくと、上図より

$$S_2(t) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3-t^2} \cdot \sqrt{3(3-t^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(3-t^2)$$

であり、求める体積を  $V_2$  とすると

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} S_2(t) dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3-t^2) dt \\ &= 3V_1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

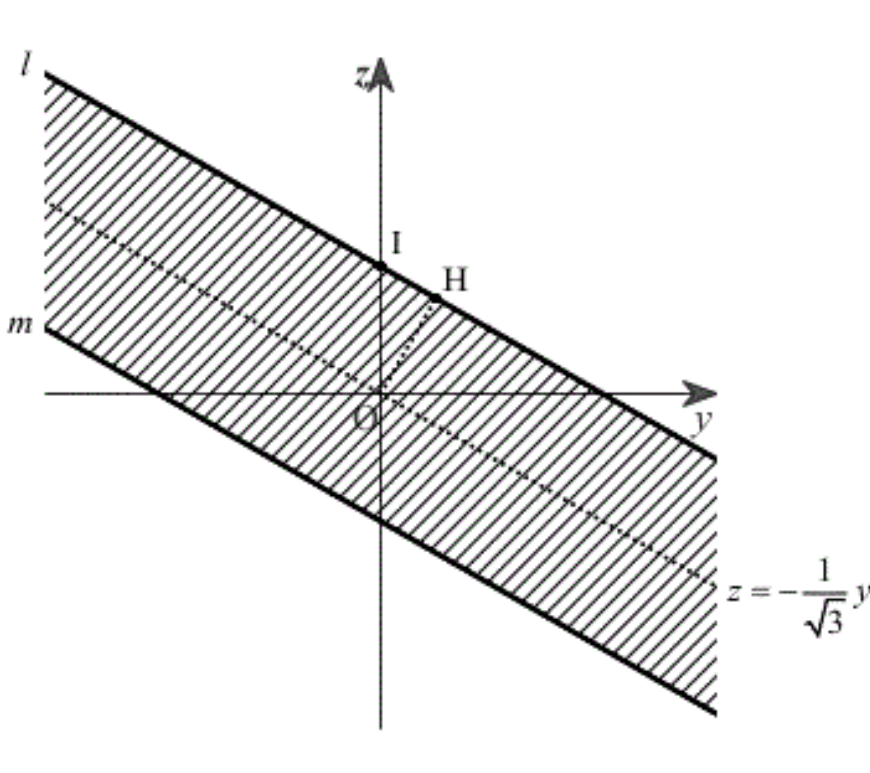
となる。

(答) 6

(3)

$yz$  平面上の直線  $y+\sqrt{3}z=0$  からの距離が  $\sqrt{3}$  以下となる領域を  $C'$  とすると、  $C'$  は  $yz$  平面上の直線  $y+\sqrt{3}z=0$  を軸とする半径  $\sqrt{3}$  の円柱である。したがって、  $t$  を  $-\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$  を満たす実数として、  $C'$  の平面  $x=t$  における断面を考えると、直線  $y+\sqrt{3}z=0$  からの距離が

$\sqrt{3-t^2}$  である2直線に挟まれた次図のような帯状領域となる。ただし、  $O(t, 0, 0)$  である。



ここで、図のように2直線をそれぞれ  $l, m$ 、原点から  $l$  に下ろした垂線の足を  $H$ 、  $l$  と  $z$  軸の

交点を  $I$  とすると、  $OH = \sqrt{3-t^2}$  であり、直線の傾きより  $HI : OH : OI = 1 : \sqrt{3} : 2$  であるから

$$OI = \frac{2}{\sqrt{3}} OH$$

$$= 2\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}$$

となり、直線  $l$  の方程式は

$$z = -\frac{1}{\sqrt{3}}y + 2\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}$$

で与えられる。いま、直線  $l$  と  $y = -\sqrt{3-t^2}$  および  $y = \sqrt{3-t^2}$  との共有点をそれぞれ  $P, Q$  とし

て、点  $P, Q$  の  $z$  座標をそれぞれ  $p, q$  とおくと

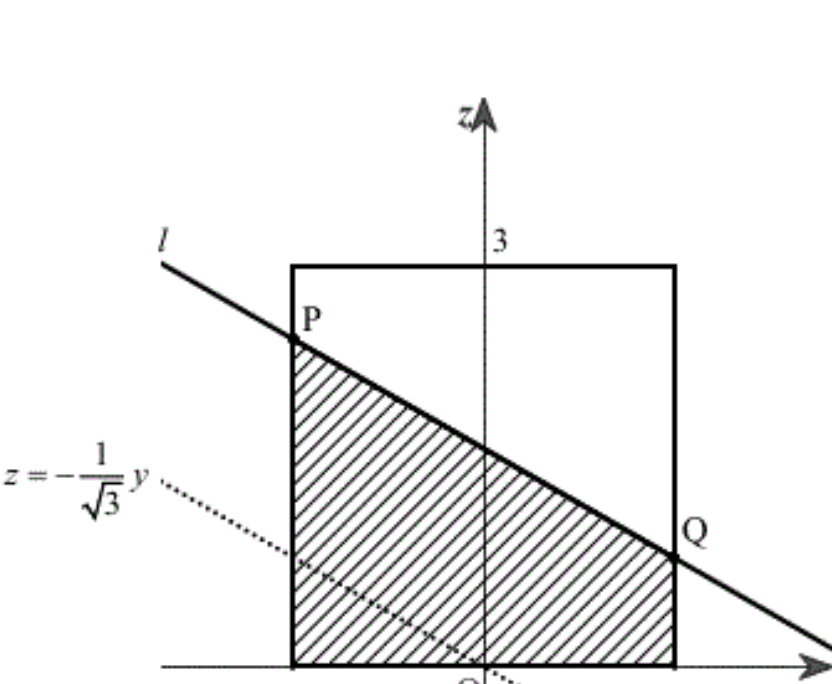
$$p = \frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{1-\frac{t^2}{3}} = 3\sqrt{1-\frac{t^2}{3}} \leq 3$$

$$q = -\frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{1-\frac{t^2}{3}} = \sqrt{1-\frac{t^2}{3}} \leq 1$$

であり、さらに、原点に関する点対称性より、直線  $m$  と  $y = -\sqrt{3-t^2}$  の共有点の  $z$  座標は  $-q$ 、

直線  $m$  と  $y = \sqrt{3-t^2}$  の共有点の  $z$  座標は  $-p$  となる。  $D$  は  $C$  と  $C'$  の共通部分であるから、以

上の  $p, q$  の関係に注意して、  $D$  を平面  $x=t$  で切った断面を図示すると次のようになる。



したがって、平面  $x=t$  における  $D$  の断面積を  $S(t)$  とおくと、上図より

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3-t^2} \cdot (p+q)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}(3-t^2)$$

であり、求める体積を  $V$  とすると

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} S(t) dt \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3-t^2) dt \\ &= 8V_1 \\ &= 16 \end{aligned}$$

となる。

(答) 16