

1995 年度 入学試験問題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線より切り離してください。
4. 試験時間は 60 分です。
5. 問題は 2 ページ目にあり 3 問で、余白は計算用紙です。

A日程 工学部(第1部) 2/2実施

〔Ⅰ〕 $x \geq 0$ に対して

$$F(x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^x e^{-t} \sin t \, dt, \quad G(x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^x e^{-t} \cos t \, dt$$

とおく。ここで e は自然対数の底である。

- (1) $F(x) + G(x)$ と $F(x) - G(x)$ を x で表せ。
- (2) $F(x)$ の極大値をすべて求めよ。
- (3) (2) で求めた極大値を大きいものから小さいものへと順に並べて数列 $\{a_n\}$ をつくる時、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよ。

〔Ⅱ〕 xy 平面上に、原点 $(0, 0)$ と $(1, 1)$ を結ぶ線分と、 $(1, 1)$ と $(1, 0)$ を結ぶ線分と、 $y = \log x$ ($1 \leq x \leq e$) のグラフとをつないだ曲線がある。この曲線を y 軸を中心に回転させた容器を考える。 y 軸を中心に半径 e の範囲に、毎単位時間、単位面積あたり $\frac{1}{6}$ 単位体積の水を、 y 軸の正の方向から(雨のように)降りそそぐ。ただし、水が斜面を流れる時間は無視するものとする。また、対数は自然対数であり、 $e = 2.7 \dots$ である。

- (1) 空の容器に水がたまり始めると、容器の中央に池 P_1 、そのまわりに環状島、その外側に外堀 P_2 が生じる。 P_1 、 P_2 にたまった水量 V_1 、 V_2 をそれぞれ水深 y ($0 \leq y \leq 1$) の関数で表せ。
- (2) P_1 と P_2 ではどちらが先に水があふれるか。また、そのあふれるまでの時間を求めよ。
- (3) 容器が満杯になるまでの時間を求めよ。

〔Ⅲ〕 次の をうめよ。

$a > 0$ とし、曲線 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ を C 、直線 $y = \frac{1}{a}x$ を l とする。

C 、 l 上の点の x 座標をそのままにし、 y 座標を ① 倍すると、曲線 C は円 $C': x^2 + y^2 =$ ② になり、直線 l は傾き正の直線 l' になる。 l' と x 軸のなす角を θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とすれば

$$\tan \theta = \text{ ③ } \cdots \cdots (1)$$

である。

C' 、 l' および x 軸の正の部分により囲まれる第 1 象限の部分の面積を a と θ を用いて表せば ④ である。

したがって、 C 、 l および x 軸の正の部分によって囲まれる第 1 象限の部分の面積 S を (1) を用いて θ だけで表せば ⑤ となる。

ここで、 $a \rightarrow \infty$ のとき $\theta \rightarrow 0$ であるから、 $\lim_{a \rightarrow \infty} S =$ ⑥ となる。

〔Ⅳ〕 次の にあてはまる数値を入れよ。ただし、解答は既約分数で表せ。

さいころを続けて 3 回投げる。このとき、

- (1) 出る目の数がすべて異なる確率は ① である。
- (2) 出る目の数の積が偶数になる確率は ② である。
- (3) 出る目の数の積が 9 の倍数になる確率は ③ である。
- (4) 出る目の数の積が 10 の倍数になる確率は ④ である。
- (5) 出る目の数を左から順に並べて 3 けたの整数をつくるとき、その整数が 444 以上になる確率は ⑤ である。

(以 上)