

1996 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答はすべて黒鉛筆(HB)で別紙解答用紙所定の欄に記入してください。
3. 解答用紙右端の出席票に印刷されている受験番号を確認してください。間違いがなければ氏名欄に署名し、切取線より切り離してください。
4. 試験時間は 90 分です。
5. 問題は、2, 3 ページ目にあり 4 問で、余白は計算用紙です。

〔Ⅰ〕 $a_1 = 2,$

$$n \geq 1 \text{ のとき, } a_{2n} = \sqrt{a_{2n-1}}, \quad a_{2n+1} = \frac{3}{2}a_{2n} - \frac{1}{2}$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1) $a_n > 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。

(2) $a_{2n+1} - 1 < \frac{3}{4}(a_{2n-1} - 1)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

〔Ⅱ〕 $f(x)$ は $x > 0$ で定義された正の値をとる関数とする。

曲線 $C: y = f(x)$ ($x > 0$) が次の条件 (ア), (イ) を満たすとき、関数 $f(x)$ を定めよ。ただし、 O は原点である。

(ア) C 上の任意の点 P における C の法線と x 軸に関して対称な直線は、直線 OP と直交する。ただし、 P における C の法線とは、 P を通り、 P における C の接線と直交する直線のことである。

(イ) 点 $(1, 0)$ と C 上の点との距離の最小値は 1 である。

〔Ⅲ〕 次の をうめよ。

- (1) 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ により表される一次変換が、だ円 $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$

を円 $x^2 + (y-1)^2 = r^2$ にうつすとき、

$$a = \text{①}, b = \text{②}, c = \text{③}, d = \text{④},$$
$$r = \text{⑤}$$

である。ただし、 $ad - bc \geq 0$, $r > 0$ とする。

- (2) 球面 $S_1: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$

の中心の座標は ⑥ , 半径は ⑦ ,

$$\text{球面 } S_2: x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 6z + 17 = 0$$

の中心の座標は ⑧ , 半径は ⑨ であり, S_1, S_2 の中心間の距離は ⑩ である。

球面 S_1, S_2 の両方に接する平面で, S_1, S_2 の中心がその平面の同じ側にあるものを考えると, このようなすべての平面は定点 ⑪ を通る。

〔Ⅳ〕 次の をうめよ。

座標平面上に定点 $A(\cos \alpha, \sin \alpha)$ がある。ただし, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする。

動点が原点 O から x 軸上の x 座標が負でない点 B まで速さ v で直線運動をし, さらに点 B から A まで速さ $\frac{v}{2}$ で直線運動をする。

線分 BA が B において x 軸の正の方向となす角を θ ($\alpha \leq \theta < \pi$) とすれば, $OB = \text{①}$, $BA = \text{②}$ である。したがって, 動点が O を出発して A に到達するまでの所要時間 T は, θ の関数として $T = \text{③}$ と表される。

T を最小にする θ の値 θ_0 を求めると

$$\alpha \leq \text{④} \text{ のときは } \theta_0 = \text{⑤},$$
$$\alpha > \text{④} \text{ のときは } \theta_0 = \text{⑥}$$

となる。

(以 上)